NIEUWE VERHANDELINGEN

DER

EERSTE KLASSE

VAN HET

KONINKLIJK-NEDERLANDSCHE INSTITUUT.

DERTIENDE DEEL.

VERHANDELING

OVER DE

LEMNISCATEN.

DOOR

G. J. VERDAM,
Hoogleeraar te Leiden.

AMSTERDAM,
C. G. SULPKE.
1847.

BIJDRAGE

TOT DE

BESCHOUWING DER LEMNISCATEN,

DOOR

G. J. VERDAM.

De *Lemniscaten* of kromme lijnen, welke den vorm hebben van een *strik*, of van het cijfer *acht*, in eene horizontale rigting geschreven (∞), schijnen het eerst aan eene meer bepaalde beschouwing onderworpen te zijn door eene opmerking van JACOB BERNOUILLI.

Bij een onderzoek betrekkelijk de constructie der kromme lijn van gelijkmatige nadering en verwijdering, door LEIBNITZ ter bepaling voorgesteld, en door hem genoemd *curva isochrona paracentrica*, zocht BERNOUILLI deze constructie, — eerst uit de rectificatie der *elastische kromme* afgeleid — bij voorkeur uit de rectificatie eener algebraïsche kromme lijn te verkrijgen, en kwam ook tot eene kromme lijn, hebbende tot vergelijking

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2).$$

De figuur dezer kromme lijn is gelijk aan die van een strik; BERNOUILLI noemde ze daarom *Lemniscata*. Te regt merkte hij op, «dat deze »kromme lijn onder de kromme lijnen van den vierden graad eene zeer »voorname plaats verdiende. Na den cirkel, de parabola en logarithmica,

be-

» behoorde de lemniscata op dezelfde lijn te staan met de ellips en hyper» bola, omdat zij, óf alleen, óf met eene der laatst genoemde, de constructie » aangeeft van mechanische kromme lijnen, welke, door hulp der eerstge» noemde, niet kan verkregen worden; dit is b. v. het geval met de *iso*» *chrona paracentrica*, en ook met de kromme der *lamina elastica.* » (*Acta Erud.* 1694, en *Opera* JAC. BERN. I. pag. 608 sqq.)

Ten aanzien van het onderzoek dezer laatste is men ook veel aan JACOB BERNOUILLI verschuldigd, en daar hij voor de differentiaal-aequatie eener elastische kromme lijn, onder bepaalde voorwaarden, gevonden had eene vergelijking, welke kan aangemerkt worden als te bestaan uit het verschil van twee andere, de eerste tot de rectificatie der ellips, de tweede tot die der lemniscata betrekking hebbende, leidde hij daaruit op zeer gepaste wijze af, hoe eenige ordinaat der *lamina* zou kunnen gevonden worden door het verschil van een' elliptischen en lemniscatischen boog.

BERNOUILLI toonde het wezen der *lemniscata*, en een paar gevallen van aanwending dezer kromme lijn in wiskundige bespiegelingen, als het ware slechts ter loops, aan. Hij bleef niet opzettelijk bij de beschouwing dezer kromme lijn verwijlen. Dit geschiedde ongeveer 50 jaren later; eerst door FAGNANO, kort daarop door EULER. Beide deze wiskundigen hebben inzonderheid het onderwerp der *rectificatie* van de lemniscata uitvoeriglijk onderzocht, en zijn daardoor tot belangrijke uitkomsten gekomen, welke het bepalen van gelijke, van veelvoudige of van evenmatige bogen leeren. Eenige eigenschappen der lemniscata, hare wording uit de gelijkzijdige hyperbool, hare quadratuur, involutie, enz., waren ook onderzocht en gevonden, en LEGENDRE — een oogenblik op deze kromme lijn lettende — wees later aan, dat hare bogen eigenaardige meetkundige voorstellingen zijn van de elliptische functiën der eerste soort, mits de modulus hebbe de bepaalde waarde van $\sqrt{\frac{1}{2}}$. Veel meer toch zegt LEGENDRE er niet van, en de wijze, waarop hij de zaak ontvouwd heeft, is mij — even als zijne bekende transformatie der formule voor de rectificatie der hyperbola — steeds zeer gedwongen voorgekomen; het een zoowel als het ander is voor meer natuurlij-

lijke of minder gedwongene ontwikkeling vatbaar; maar het betoog daarvan behoort niet te dezer plaatse.

Een' geruimen tijd scheen het, alsof de beschouwing der *lemniscata* van BERNOUILLI, of, meer algemeen, de beschouwingen der lemniscatische kromme lijnen, ten einde waren, althans geene uitbreiding verdienden, totdat zij, in de laatste jaren, wederom de opmerkzaamheid trokken, en thans, bij herhaling, de ernstige bemoeijing van geachte wiskundigen doen blijken. De fransche wiskundige SERRET heeft zich inzonderheid deze beschouwingen ten doel gesteld; hem is gevolgd de engelsche wiskundige ROBERTS; en ook CHASLES en LIOUVILLE nemen deel in de behandeling van onderwerpen, welke tot dezelfde theorie behooren. SERRET is meer opzettelijk tot de beschouwing der lemniscatische kromme lijnen gekomen, door zijn onderzoek nopens de meetkundige voorstelling der elliptische functiën van de eerste soort. Het eerst trof zijne opmerking de voorstelling der beide euleriaansche integralen, waarbij hij de lengte van het quadrant der lemniscata van BERNOUILLI uitdrukte door eene *gamma*, hebbende tot radix $\frac{1}{4}$, dat is door de functie $\Gamma(\frac{1}{4})$, hetgeen trouwens van zelf lag opgesloten in het verband, tusschen de euleriaansche integralen en de elliptische functiën bestaande, en door LEGENDRE aangewezen; gelijk LEGENDRE bovendien, in het tweede deel van zijn *Traité des fonct. ellipt.*, heeft geleerd, dat de functiën, welke de rectificatie der *lemniscata* en der *curva elastica* geven, ook vervangen kunnen worden door bepaalde euleriaansche integralen der eerste soort. SERRET lette vervolgens op het verband tusschen de vergelijkingen zoo der lemniscata als van den cirkel en der gelijkzijdige hyperbola, onder polaire coördinaten. Daar die van den cirkel, hebbende $\frac{1}{2}a$ tot radius, de pool in den omtrek en de middellijn, welke door deze pool gaat, tot as, voorgesteld wordt door

$$r = a \cos . t,$$

of wel door

$$r^1 = \frac{(2a)^1}{2} \cos . 1 . t,$$

en

en die van de lemniscaat, hebbende de pool in den knoop, hare as tot vaste lijn of as voor de telling der bogen t, en a tot zoogenaamden brand-punts-afstand, is

$$r^2 = \frac{(2\,a)^2}{2} \cos . 2\,t\,,$$

kwam hij van zelf tot de beschouwing van het verband tusschen de uitdrukking der lengte van de omtrekken der kromme lijnen, meer algemeen tot vergelijking hebbende

$$r^m = \frac{(2\,a)^m}{2} \cos . m\,t\,,$$

(tot lemniscaten van hoogere orde behoorende), en de euleriaansche integraal $\Gamma\left(\frac{1}{2\,m}\right)$, welke beschouwing hem tot hoogst belangrijke uitkomsten voerde.

Later heeft hij meermalen andere deelen van dit onderwerp, of van aanverwante punten, onderzocht en uitvoerig behandeld. Inzonderheid verdient genoemd te worden zijn onderzoek der zoogenaamde *Cassinoïden*, van welke hij aantoonde, dat derzelver rectificatie elke elliptische functie der eerste soort — voor elken willekeurigen modulus — oplevert, terwijl dit onderzoek slechts eene inleiding was tot dat der cassinoïden van hoogere orde, begrepen in de aequatie

$$r^{2\,m} - 2a^m r^m \cos . m\,t + a^{2\,m} = b^{2\,m}\,.$$

ROBERTS heeft eenige vertoogen gegeven over de *sphaerische lemniscata*, zoowel over die, welke op het sphaerisch vlak eveneens ontstaat, gelijk de cassinoïde op een plat vlak, als over die, welke men heeft uit de snijding van een' bol en van een' kegel. Ten aanzien der laatste is hij, onder vele wetenswaardige gevolgtrekkingen, gekomen tot dit resultaat, dat men door de bogen van deze sphaerische lemniscata de meetkundige voorstellingen heeft van al de gewone elliptische functiën, zoowel van die der *tweede* en *derde* als van die der *eerste soort*.

Al deze en andere ontwikkelingen vindt men in de laatste deelen

van

van het bekende *Journal de mathématiques pures et appliquées, publié par* LIOUVILLE (deel VII — XI). Een der vertoogen van SERRET treft men ook aan in het *Cambridge and Dublin mathematical journal, new series*, vol. I. Ik verwijs hier op die ontwikkelingen, van welke ik slechts eenige weinige der merkwaardigste uitkomsten vermeldde, daar het noch in mijn plan ligt, noch tot verklaring van mijn voornemen behoort, noch tot bereiking van mijn doel gevorderd wordt, eene analyse van het bedoelde onderzoek te geven.

Onder hetgeen ik reeds vroeger in mijne adversaria opteekende, behoorden ook bijzonderheden, welke tot de beschouwing der lemniscaten betrekking hadden. Eenige denkbeelden werden ontwikkeld, en gaven geene onbelangrijke resultaten. Van anderen moest ik mij met de eenvoudige aanteekening, met een *pro memoria*, vergenoegen, om later, bij meerdere tijds-beschikking, de stof vollediger te bewerken. Het is er verre af, dat ik zou kunnen zeggen, in het weinige, dat ik meer ontwikkeld had aangeteekend, even belangrijke waarheden te hebben betoogd, als die, welke door bovengenoemde wiskundigen zijn aan het licht gebragt. Maar ik zou kunnen aantoonen, dat mij niet alles nieuw was, hetgeen ik in hunne vertoogen of verhandelingen ontwikkeld aantrof. Eerder evenwel wil ik en mag ik van eenige andere beschouwingen gewagen, welke men noch bepaaldelijk ontwikkeld, noch ook vermeld vindt, of van welke de gezigtspunten anders en algemeener hadden kunnen zijn gekozen geworden. Oorspronkelijk stelde ik mij voor, zoowel de behandeling van onderscheidene punten, die de *lemniscata* van BERNOUILLI en de cassinoïde betreffen, als eene beschouwing van andere merkwaardige lemniscaten. Van dat voornemen heb ik nogtans afgezien, eensdeels uit hoofde der te groote uitbreiding, welke mijne bijdrage daardoor zou verkijgen, andersdeels om bijzondere redenen, welker vermelding hier onnoodig is.

Meer eenvoudige gedeelten van het onderwerp voorbijgaande, en een te lang verwijl bij enkele punten eveneens willende nalaten, bepaal ik mij dienvolgens voornamelijk, hoezeer niet geheel uitsluitend, om het een en an-

ander over wording en verwantschap van lemniscatische kromme lijnen aan te stippen, en ten aanzien van sommige dezer lemniscaten eenige uitkomsten van berekening te doen kennen, door welke aan derzelver beschouwing zekere plaats in de wiskundige analyse toekomt.

---

§ I.

De gewone lemniscata is eene lijn van den vierden graad, van welke de vergelijking geen' standvastigen term en alleenlijk de evene magten der elementen bevat; bovendien is deze vergelijking volstrekt homogeen, en houdt slechts één parameter in; waarom dan ook alle zoodanige lemniscaten gelijkvormig zijn. Wanneer men van de algemeene vergelijking der kromme lijnen van de derde orde, dat is der lijnen van den vierden graad, die termen uitzondert, in welke de onevene magten van de elementen, of wel der orthogonale coördinaten x en y, voorkomen, zal de overblijvende uitdrukking eene vergelijking van den vierden graad wezen, tot onderscheidene vormen van kromme lijnen behoorende, naar gelang de coëfficienten andere betrekkingen tot elkander hebben. Onder die vormen heeft ook de *cassinoïde* eene plaats; andere vormen, aan dien der cassinoïde verwant, en ook in figuur aan die der cassinoïde nabijkomende, vindt men er eveneens onder. Stelt men, in de vergelijking der gewone of eenvoudige cassinoïde, den standvastigen term $= 0$, zoo heeft men de vergelijking der gewone *lemniscata*. Maar gelijk van de eerstgenoemde soort van kromme lijnen de eenvoudige cassinoïde een bijzondere vorm is, zoo is de gewone *lemniscata* slechts eene bijzonder vorm eener andere soort van lijnen des vierden graads, verwant met de eerstbedoelde soort, en van deze eenvoudiglijk daarin onderscheiden, dat hare algemeene vergelijking geenen standvastigen term inhoudt. Zoodanige vergelijking behoort tot symmetrische kromme lijnen, onder welke men er meerdere opmerkt, die een eigenlijk gezegden lemniscatischen vorm hebben.

De

De vergelijking dezer andere soort van kromme lijnen, onder welke zich meer bepaaldelijk lemniscaten bevinden, zou derhalve in het algemeen wezen

$$a x^4 + b y^4 + c x^2 y^2 + d x^2 + e y^2 = 0 \ .$$

Maar zoo deze vergelijking werkelijk eene lemniscata geeft, is de coördinaten-oorsprong in den knoop, en de abscissen-as langs de as der kromme lijn gerigt. Deze plaatsing en de symmetrische figuur der kromme brengen mede, dat al de termen van dezelfde afmeting zijn, wanneer men zoowel op de parameters let als op de elementen, en dat bovendien de vergelijking kunne verdeeld worden in twee groepen van termen, van welke de eene volkomen quadraat is. Ergo wordt de algemeene vierde-magts-aequatie, welke de zoogenaamde middelpunts-aequatie van onderscheidene lemniscaten kan wezen, meer bepaaldelijk

$$(a^2 x^2 + b^2 y^2)^2 = \alpha^6 x^2 + \beta^6 y^2 \ , \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

kunnende de hier aangenomen coëfficienten zoowel negatief als positief wezen, en elk derzelve uit het product van evene-magtsfactoren bestaan.

Deze vergelijking kan derhalve tot lemniscatische kromme lijnen behooren, maar zij behoort er niet uitsluitend toe; gelijk blijken zal, bevat zij ook de vergelijkingen van andere kromme lijnen, met de lemniscaten verwant. Evenwel is het zeer gemakkelijk om den vorm der vergelijking (1) nog nader te begrenzen, zoodat zij eerder tot de eigenlijke lemniscaten betrekking heeft. Want daartoe moet met $x = 0$ overeenstemmen $y = 0$ en $y = \pm p \sqrt{-1}$ en met $y = 0$, moet $x = 0$ en $x = \pm q$ (eene bestaanbare waarde) zijn, hetgeen plaats heeft zoo men stelt:

$$(a^2 x^2 + b^2 y^2)^2 = \alpha^6 x^2 - \beta^6 y^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

waaruit men ook, voor $a^2 = b^2 = 1$, en voor $\alpha^6 = \beta^6 = c^2$ (zijnde c zekere parameter), de vergelijking der gewone lemniscata heeft.

Maar van alle lemniscaten zijn de vergelijkingen niet uitsluitend begrepen in de vergelijking (2); want men ziet ligtelijk in, dat ook eene homogene en symmetrische zesde of achtste magts-aequatie, enz. tot eene

krom-

kromme lijn van lemniscatischen vorm betrekking kan hebben. Men kan dus de lemniscaten onderscheiden als kromme lijnen van dezelfde klasse, maar van verschillende orde. Die, van welke de vergelijking is van den vierden graad, zijn van de *eerste orde;* die van de *tweede orde* hebben eene zesde magts-vergelijking, enz. Nogtans heeft hier plaats, hetgeen bij andere kromme lijnen van verschillende orde veelal geene plaats kan vinden, te weten, dat, alleenlijk door zekere betrekkingen van coëfficienten, eenige lemniscata van hoogere orde in eene andere van lagere orde kan overgaan.

Gelijk verder blijken zal, kan men zich de wording van lemniscaten op onderscheidene wijzen voorstellen; voor elke lemniscata zal deze hier bedoelde wording, hetzij dan geometrische, hetzij mechanische, steeds bijzonder wezen. Men kan echter aan alle lemniscaten eene zelfde wijze van meetkundige wording toekennen. Want men heeft voor de centrale poolvergelijking der gewone lemniscata

$$r^2 = a^2 cos . 2\varphi ,$$

indien namelijk a de halve grootste middellijn der kromme is, r de voerstraal en φ de hoek of boog, tusschen die middellijn en den voerstraal. Tevens is de polaire middelpunts-aequatie der gelijkzijdige hyperbola, hebbende a tot halve as, ρ en φ tot polaire coördinaten, en met de lemniscata concentrisch zijnde,

$$\rho^2 = \frac{a^2}{cos . 2\varphi} .$$

Ergo, gelijk bekend was, is het product der voerstralen r en ρ, welke tot een' zelfden hoek φ behooren, standvastig. Neemt men echter de gemeenschappelijke as a dezer beide kromme lijnen als eenheid van lengte, zoo is, in het polaire coördinaten-stelsel, de lemniscata van BERNOUILLI de *omgekeerde kromme* der gelijkzijdige hyperbola. — In het regthoekig stelsel zou de omgekeerde kromme eener gelijkzijdige hyperbola eene regte lijn wezen of kunnen wezen. — Deze hyperbola heeft tot asymptoten de raaklijnen der lemniscata, welke door den knoop gaan. Zoo men derhalve eene

eene kromme lijn denkt, hebbende eene hyperbolische gedaante, en minstens twee symmetrische takken tusschen twee asymptoten (die elken willekeurigen hoek kunnen insluiten), zal de *omgekeerde* dezer hyperbolische lijn eene lemniscata moeten wezen, moetende de benaming van *omgekeerde kromme* verstaan worden in den zin, welke in eene mijner vroegere bijdragen is beteekend of aangenomen. Van welke orde of van welken graad zoodanige hyperbolische kromme dan is, altijd zal hare omgekeerde eene lemniscata wezen, of een afzonderlijk deel van zuiver lemniscatischen vorm bezitten. *Alle lemniscaten zijn dus omgekeerd-hyperbolische kromme lijnen.* De hyperbolen, welke de lemniscaten van de *eerste* orde tot omgekeerde kromme lijnen hebben, zijn in het algemeen van de *derde* orde, dat is, zij hebben eene zesde-magts-vergelijking; voor de gewone lemniscata is nogtans de hyperbola van de eerste orde.

De gewone lemniscata wordt ook gezegd te zijn de kromme lijn der voetpunten van de normalen, uit het centrum eener gelijkzijdige hyperbola op hare raaklijnen nedergelaten. Het is duidelijk, dat aan andere lemniscaten eene gelijkvormige wording uit hyperbolische lijnen toekomt, en dat men derhalve ook, hiermede overeenkomstig, de lemniscatische kromme lijnen zou kunnen bepalen.

Zij de aandacht eenige oogenblikken meer bijzonder gevestigd op de lemniscaten van de eerste orde. Hare vergelijkingen zijn begrepen in de vergelijking (2); — men neme echter meer algemeen de vergelijking (1). Deze is, in polaire coördinaten uitgedrukt,

$$r^2 = \frac{\alpha^6 - (\alpha^6 - \beta^6)\, sin.^2\, \varphi}{[a^2 - (a^2 - b^2)\, sin.^2\, \varphi]^2}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (3)$$

of ook

$$r^2 = 2\, \frac{(\alpha^6 + \beta^6) + (\alpha^6 - \beta^6)\, cos.\, 2\varphi}{\{(a^2 + b^2) + (a^2 - b^2)\, cos.\, 2\varphi\}^2} \quad \ldots \ldots \ldots (4)$$

Eenvoudiger zou men kunnen stellen

$$r^2 = \frac{(2)^2}{2},\ \frac{p + q\,.\,cos.\,2\varphi}{(c + d\,.\,cos.\,2\varphi)^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (5)$$

De-

Deze goniometrische functie bevat alzoo de polaire vergelijkingen der mogelijke lemniscaten van de eerste orde. Men zou nog andere vormen van goniometrische functieën kunnen stellen, of uit de hier bepaalde kunnen afleiden, zoo zij slechts tusschen twee grenzen $\varphi = 0$ en $\varphi = \mu$ onafgebroken bestaat, voor $\varphi = 0$ eene eindige waarde erlangt, voor $\varphi = \mu$ *nul* wordt, van af $\varphi = \mu$ tot $\varphi = 180° - \mu$ onbestaanbare waardijen geeft, en van daar tot $\varphi = 180°$ wederom dezelfde uitkomsten oplevert als in het eerste quadrant. Nog zou men de vergelijking in dier voege kunnen zamenstellen, dat de opvolgende waarden van r in het tweede en derde quadrant, hoezeer onafgebroken aangroeijende, nogtans van de overeenkomstige in het eerste en vierde quadrant verschilden; de oplossing van r zou daarbij van die eener volkomene tweede-magts aequatie afhangen, en de vergelijking zou tot de niet symmetrischen lemniscaten behooren. Eindelijk, gelijk SERRET opzigtelijk de vergelijkingen der lemniscata van BERNOUILLI en der *Cassinoïde* aannam, zou men ook hier kunnen denken aan alle kromme lijnen, welker vergelijkingen begrepen zijn in de formule

$$r^m = 2^{m-1} \frac{M + N \cos. m\varphi}{(P + Q \cos. m\varphi)^m}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

maar deze hebben voor $m > 2$ meer dan twee strikken; het zijn veelvoudige lemniscaten, en derzelver beschouwing ligt voor het tegenwoordige buiten mijn plan.

Hoezeer sommige der lemniscaten, welker vergelijkingen begrepen zijn in de formule (3) of (4), eigenschappen bezitten of kunnen bezitten, welke van genoegzame belangrijkheid zijn om gekend te worden, zoo is hier, bij een algemeen onderzoek, de bepaling der quadratuur, en inzonderheid der rectificatie, meest belangrijk. De laatste toch is, in den regel, afhankelijk van elliptische integralen, en kan dus nieuwe voorbeelden van de meetkundige voorstelling dier integralen opleveren.

Belangende de quadratuur, zoo ziet men gereedelijk in, dat deze volkomen bepaald is, men heeft toch

$$\partial I = \tfrac{1}{2} r^2 . \partial\varphi ,$$

en

en wanneer men het tweede lid der vergelijking (4) met $\frac{1}{2}\partial\varphi$ of met $\frac{1}{4}\partial\,.\,2\varphi$ multipliceert, zal dit lid volstrektelijk integreerbaar zijn, zoodat *alle lemniscaten van de eerste orde eene volkomene of bepaalde quadratuur hebben.* In de oorspronkelijke vergelijking (2) — of, algemeener, in de vergelijking (1) — zijn de coëfficienten van x^2 en y^2 gesteld α^6, β^6; deze vorm komt aan die coëfficienten toe; doch het is overigens om het even, hoe of zij in berekeningen beteekend worden. Men zou ze, als in de vergelijking (5), p en q kunnen noemen; doch voor de symmetrie met de andere coëfficienten a^2 en b^2, stelle men die coëfficienten α^2 en β^2; daardoor is dan

$$r^2 = 2\frac{(\alpha^2+\beta^2)+(\alpha^2-\beta^2)\cos.2\varphi}{\{(a^2+b^2)+(a^2-b^2)\cos.2\varphi\}^2} \,\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Bijaldien $(a^2+b^2) > (a^2-b^2)$ is, hangt de quadratuur af van een' cirkelboog; maar van een logarithmus in het tegengestelde geval.

Dat grooter of kleiner zijn van (a^2+b^2) ten opzigte van (a^2-b^2), hangt af van het teeken + of — der termen, welke a^2 en b^2 tot coëfficienten hebben. Bij eenige straks te behandelen voorbeelden, zullen a^2 en b^2 steeds het positieve teeken voor zich hebben, en in deze vooronderstelling wordt de formule voor den geheelen inhoud der ruimte, door de vier quadranten der kromme lijn ingesloten,

$$I=\frac{1}{a^2b^2}\left\{\frac{(\alpha^2b^2-\beta^2a^2)\sin.2\mu}{(a^2+b^2)+(a^2-b^2)\cos.2\mu}+\frac{\alpha^2b^2+\beta^2a^2}{ab}.\,Boog\,tang.(=\frac{b}{a}tang.\mu)\right\}(8)$$

in welke formule de boog μ is de grootste waarde, welke de polaire abscis φ in het eerste quadrant kan verkrijgen, en zoo de kromme eene eigenlijke lemniscata is, zal μ wezen de boog, metende den hoek tusschen de as of grootste middellijn der lemniscata, en eene der beide raaklijnen, gaande door den knoop.

Met de rectificatie is het geheel anders gelegen. Deze is geenszins zoo bepaald. In het algemeen zou zij door de methode der quadraturen, kunnen volbragt worden; maar ook is zij door *ultra-elliptische* of *Abelsche*

in-

integralen bepaald, en in eenige gevallen loopt zij door berekening van gewone elliptische functieën af. De rectificatie-formule is van een' zamengestelden vorm, en verhoudt zich aldus:

$$\partial s = \frac{\partial \varphi \,.\, \sqrt{2}}{\{(a^2+b^2)+(a^2-b^2)\cos.2\varphi\}^2 \,.\, \sqrt{\{(\alpha^2+\beta^2)+(\alpha^2-\beta^2)\cos.2\varphi\}}} \times$$

$$\sqrt{\Big\{[(a^2+b^2)+(a^2-b^2)\cos.2\varphi]^2 . [(\alpha^2+\beta^2)+(\alpha^2-\beta^2)\cos.2\varphi]^2}$$

$$\overline{+\Big[2(a^2\beta^2-\alpha^2b^2)+(a^2-b^2)[(\alpha^2+\beta^2)+(\alpha^2-\beta^2)\cos.2\varphi]\Big]^2 \sin.^2 2\varphi\Big\}} \quad (9)$$

De herleiding dezer integraal slaagt onder anderen in de navolgende gevallen:

1° Als men heeft $\alpha = 0$, mits β^2 positief.
2° Zoo $\beta = 0$ is, mits α^2 positief.
3° Indien $a^2\beta^2 = \alpha^2 b^2$, of $a^2 : b^2 = \alpha^2 : \beta^2$ is.
4° Wanneer $\alpha^2 = \beta^2$ is, of $\alpha^2 - \beta^2 = 0$.
5° $a^2 = b^2$, dat is $a^2 - b^2 = 0$, of ook $a^2 + b^2 = 0$.
6° $a = 0$ of $b = 0$, en $\beta^2 = -\alpha^2$.

De drie eerste gevallen eischen geene breedvoerige ontwikkeling, daar zij tot de rectificatie der kegelsneden behooren.

Als men heeft $\alpha = 0$, wordt $\sqrt{\{(\alpha^2+\beta^2)+(\alpha^2-\beta^2)\cos.2\varphi\}} = \beta \sin.\varphi \sqrt{2}$; hierdoor wordt reeds het integreren aanmerkelijk verligt; maar het polinomium, onder het wortelteeken in den teller der differentiaal-uitdrukking voorkomende, wordt mede eenvoudiger, en wel, na alle herleidingen, eene zesde-magts-uitdrukking van den derden-magts-vorm, welke onmiddelijk tot dien eener elliptische functie kan gebragt worden.

Is $\beta = 0$, zoo heeft met geringe wijziging hetzelfde plaats. Bestaat er tusschen de coëfficienten eene gelijke verhouding, zoodat $a^2\beta^2 = \alpha^2 b^2$ is, alsdan kan de wortelvorm in den teller der vergelijking (9) gedeeld worden door den wortelvorm, in den noemer voorkomende; deze laatste ver-

vervalt daarbij, en de overblijvende vorm is tot den elliptischen gemakkelijk herleidbaar.

Maar het onmiddelijk terug brengen der rectificatie tot elliptische integralen houdt alsdan aan de omstandigheid van het positief zijn van β^2, of daaraan, dat β^2 en b^2 gelijke teekens hebben. Want daarbij wordt het tweede lid der vergelijking (1), aldus geschreven,

$$(a^2x^2+b^2y^2)^2=\alpha^2x^2+\beta^2y^2\ ,$$

of een volkomen vierkant, of een factor van het eerste lid, en de kromme lijnen, tot welke deze vergelijking, in de opgenoemde drie eerste gevallen, behoort, zijn alzoo kegelsneden, en wel ellipsen of hyperbolen.

De drie laatste gevallen zijn minder eenvoudig; achtervolgens zullen zij hier overwogen worden.

A. Men neme in de eerste plaats aan dat $\alpha^2=\beta^2$ zij, of $\alpha^2-\beta^2=0$, en beschouwe derhalve β^2 als het positieve teeken voor zich hebbende in de oorspronkelijke vergelijking, zoodat deze zij:

$$(a^2x^2+b^2y^2)^2=\alpha^6(x^2+y^2)\ , \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

waardoor de poolvergelijking (3) een volkomen quadraat worden zal, en diensvolgens oplevert:

$$r=\pm\frac{\alpha^3}{a^2-(a^2-b^2)\,sin.^2\,\varphi} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

De formule (8) voor den inhoud geeft

$$I=\tfrac{1}{2}\pi\,.\,\frac{\alpha^6}{a^3b^3}\,(a^2+b^2)\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Voor de lengte van een boog wordt de formule (9)

$$\partial s=\frac{2\,\alpha^3\,\partial\varphi}{\{(a^2+b^2)+(a^2-b^2)\,cos.\,2\varphi\}^2}\times$$

$$\times\sqrt{\left\{[(a^2+b^2)+(a^2-b^2)\,cos.\,2\varphi]^2+4\,(a^2-b^2)^2\,sin.^2\,2\varphi\right\}}$$

$$= \frac{a^3 \partial\varphi}{\{a^2 - (a^2 - b^2)\, sin.^2\, \varphi\}^2} \times$$

$$\times \sqrt{\left\{a^4 + 2\,(a^2 - b^2)\,(a^2 - 2\,b^2)\, sin.^2\, \varphi - 3\,(a^2 - b^2)^2\, sin.^4\, \varphi\right\}}\ .$$

Deze uitdrukking wordt ligtelijk tot eene elliptische functie herleid. Men deele teller en noemer door $cos.^4\, \varphi$, zoo komt

$$\partial s = \frac{a^3\, \partial\, .\, tang.\, \varphi}{\{a^2\,(1 + tang.^2\, \varphi) - (a^2 - b^2)\, tang.^2\, \varphi\}^2} \times$$

$$\times \sqrt{\left\{a^4 + [4\,(a^2 - b^2)^2 + 2\,a^2\,b^2]\, tang.^2\, \varphi + b^4\, tang.^4\, \varphi\right\}}$$

$$= \frac{a^3\, \partial\, .\, tang.\, \varphi}{\{a^2 + b^2\, tang.^2\, \varphi\}^2} \sqrt{\left\{(a^2 + b^2\, tang.^2\, \varphi)^2 + 4\,(a^2 - b^2)^2\, tang^2 \varphi\right\}}.$$

Stellende nu $tang.\, \varphi = \frac{a}{b}\, tang.\, \frac{1}{2}\,(90° + \psi)$, zoo komt men tot

$$\partial s = + \tfrac{1}{2} a^3 .\, \partial\psi \frac{\sqrt{(a^4 - a^2\, b^2 + b^4)}}{a^2\, b^2} \sqrt{\left\{1 - \frac{(a^2 - b^2)^2}{a^2 b^2 + (a^2 - b^2)^2}\, sin.^2 \psi\right\}} \quad (13)$$

zijnde eene *elliptische functie van de tweede soort.*

Daar de kromme lijn, hebbende de uitdrukking (10) tot vergelijking, geheel en al symmetrisch is ten opzigte der assen van x en y, zullen de grenzen van den hoek φ, in de vergelijking (11), zijn $\varphi = 0$ en $\varphi = 90°$. Met $\varphi = 0$ en $\varphi = 90°$ stemmen overeen $\psi = -90°$ en $\psi = +90°$. Ergo zal men, om de lengte van $\frac{1}{4}$ des omtreks van de kromme lijn te bepalen, moeten berekenen de *complete* functie der tweede soort, behoorende tot de formule (13), en daarna de uitkomst verdubbelen.

De kromme lijn, hebbende de uitdrukking (10) of (11) tot vergelijking, heeft dan dit merkwaardige, dat hare bogen, even als die eener ellips, zekere meetkundige voorstellingen zijn van de elliptische integralen der tweede soort. De vorm van de kromme lijn komt ook min of meer den elliptischen vorm nabij; eigenlijk evenwel is de kromme een ingedrukt

ovaal,

ovaal, hoedanig eene ellips, welke men, ter plaatse van de toppen der kleine as, indrukte, of even als eene veer naar binnen boog, wezen zou. Later zal van een oppervlak worden gewaagd, hebbende kromme lijnen, gelijkvormig of gelijksoortig met de onderwerpelijke, tot voorname snijdingen; maar zij staat ook in eenig verband met de ellips, en het is niet ongepast, hier te doen opmerken, waarin deze betrekking gelegen is.

Men denke eene ellips, hebbende b tot halve *groote*, en a tot halve *kleine* as; de groote as zij horizontaal gerigt, of liever, deze as $2\,b$ zij de onveranderlijke rigting, van welke de standhoeken der voerstralen gerekend worden, bijaldien dan die standhoeken door φ, en deze voerstralen door ρ beteekend worden, zal de centrale pool-vergelijking dezer ellips wezen

$$\rho^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 - (a^2 - b^2)\,sin.^2\,\varphi}\;.$$

Vergelijkende deze uitdrukking met (11), zoo blijkt, dat

$$r = \pm\,\frac{\alpha^3 \rho^2}{a^2 b^2} = \pm\,\frac{\alpha^2}{a^2}\,.\,\frac{\alpha}{b}\,.\,\frac{\rho^2}{b} = \pm\,\frac{\alpha^2}{b^2}\,.\,\frac{\alpha}{a}\,.\,\frac{\rho^2}{a}$$

is. Op elken voerstraal der ellips bestaat derhalve een voerstraal der voorgestelde kromme lijn, en men vindt dezen voerstraal, door eerst te construeren eene derde evenredige p tot b en ρ of tot a en ρ; daarna eene vierde evenredige tot a, α en p of b, α en p, en eindelijk deze vierde evenredige te verlengen of te verkorten in reden van α^2 tot b^2 of van α^2 tot a^2. Zeer eenvoudig wordt de constructie, indien $\alpha = a$ of $= b$ is; want dan is $r = \pm\,\frac{a}{b}\,.\,\frac{\rho^2}{b}$, of $= \pm\,\frac{b}{a}\,.\,\frac{\rho^2}{a}$, en de kromme zou gelijkvormig zijn aan die, welker voerstralen derde evenredige zijn tot a of b en ρ.

Is $\alpha = a$, zoo valt de kromme lijn geheel binnen de ellips; maar deze ligt binnen de kromme lijn voor $\alpha = b$. Is $\alpha^3 = a^2 b$, dan vallen de horizontale toppen der kromme, dat is de uiteinden van hare groote of horizontale as, zamen met de toppen der groote as van de ellips; maar de

top-

toppen van de kleine of dwarsche as van het beschouwde ovaal vallen steeds binnen de ellips.

Het hier ontwikkelde bestaat in de vooronderstelling van $\alpha^2 = \beta^2$ (of eigenlijk $\alpha^6 = \beta^6$) en van β^2 positief. Ware het negatieve teeken voor β^2 geplaatst, dan zou de kromme lijn, tot vergelijking hebbende

$$(a^2x^2 + b^2y^2)^2 = \alpha^6 (x^2 - y^2), \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (14)$$

meer onmiddelijk tot het onderwerp van beschouwing dezer Bijdrage behooren. Zij zou namelijk eene *lemniscata* wezen. Deze lemniscata heeft met die van BERNOUILLI de eigenschap gemeen, dat hare raaklijnen, welke door den knoop gaan, halve regte hoeken maken met de as. En zoo α is de halve as der laatstgenoemde lemniscata, en ook $\alpha = a$ is, zullen de beide lemniscaten elkander in de toppen en in den gemeenschappelijken knoop aanraken, maar overigens zal de eerste geheel en al binnen de laatste gelegen zijn. De inhoud der hier bedoelde lemniscata is bepaald door de uitdrukking

$$\mathrm{I} = \frac{\alpha^6}{a^2 b^2}\left\{1 + \frac{b^2 - a^2}{ab}\, Boog\ tang. \left(= \frac{b}{a}\right)\right\}, \quad \ldots \ldots (15)$$

maar, hoezeer de rectificatie-formule eenvoudiger wordt dan de boven gestelde algemeene formule (9), blijft zij in afmeting te hoog, om hare behandeling tot die eener gewone elliptische functie terug te brengen.

De vergelijking (10) kan nog behandeld worden in de vooronderstelling van b^2 negatief; zij heeft alsdan betrekking tot eene andere kromme lijn; maar de resultaten blijven, met uitzondering van de formule (12), meerendeels gelden, mits $+b^2$ in $-b^2$ en $-b^2$ in $+b^2$ veranderende. In formule (13) wordt hierdoor wel is waar de modulus der functie *grooter* dan één, doch eene bekende transformatie voert dadelijk tot eene gelijksoortige functie, welker modulus is *kleiner* dan één.

B. 1° Zij $a^2 = b^2$; b^2 *positief;* α^2 (of α^6) verschillend van β^2 (of β^6) en beide *positief.*

De

De vergelijking der kromme wordt

$$(x^2+y^2)^2 = \frac{\alpha^6}{a^4}\left(x^2+\frac{\beta^6}{\alpha^6}\,y^2\right)$$

zij $\frac{\alpha^6}{a^4}=p^2$, $\frac{\beta^6}{a^4}=q^2$, zoo is de aequatie

$$(x^2+y^2)^2 = p^2x^2+q^2y^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

De kromme lijn is die, welker punten zijn de voetpunten der normalen, uit het middelpunt eener ellips (hebbende $2p$ tot grootste en $2\,q$ tot kleinste middellijn) op de raaklijnen nedergelaten; zij is lang bekend geweest, doch het is mij niet gebleken, dat men op hare rectificatie eene bijzondere aandacht gevestigd heeft, evenzoo min als op die der zoogenaamde voetpunten-kromme lijn der hyperbolen, welke eene lemniscata is, waarover straks. Zij heeft, even als de eerste der kromme lijnen, boven, sub A, overwogen, de gedaante van een ingedrukt ovaal, of van een' der vormen van de *Cassinoïde*; hare beide regthoekige assen zijn gelijk aan die der ellips; zij raakt de ellips in de vier toppen, maar ligt overigens buiten de ellips; men rangschikt haar wel eens onder de lemniscaten.

De pool-vergelijking heeft den eenvoudigen vorm van

$$r^2 = p^2 - (p^2-q^2)\,sin^2\,\varphi\,,$$

of, $p=1$, en de excentriciteit der ellips $=c$ stellende,

$$r^2 = 1 - c^2\,.\,sin.^2\,\varphi \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (17)$$

De inhoud der kromme lijn wordt, volgens de formule (8),

$$\mathrm{I} = \tfrac{1}{2}\,(p^2+q^2)\,\pi \ldots\ldots\ldots\ldots (18)$$

zijnde eene bekende uitdrukking, en beteekenende den inhoud des halven cirkels, welke de koorde van het elliptisch quadrant tot radius heeft.

Voor de rectificatie geeft de formule (9)

$$\partial s = \partial\varphi \sqrt{\left\{\frac{(1-c^2 sin.^2 \varphi)^2 + c^4 sin.^2 \varphi \, cos.^2 \varphi}{1-c^2 . sin.^2 \varphi}\right\}}$$

$$= \frac{\partial\varphi \{1-c^2(2-c^2) \, sin.^2 \varphi\}}{(1-c^2 . sin.^2 \varphi) \, (1-c^2(2-c^2) \, sin.^2 \varphi)} \, .$$

Bijaldien men nu stelt $tang. \varphi = \frac{1}{\sqrt{(1-c^2)}} . tang. \psi$, verkrijgt men:

$$\partial s = \frac{\partial\psi \, (1-c^2 \, sin.^2 \psi) \sqrt{(1-c^2)}}{\{(1-c^2) + c^2 sin.^2 \psi\} \sqrt{(1-c^2 sin.^2 \psi)}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (19)$$

Volgens deze formule is de rectificatie afhankelijk van het verschil eener elliptische functie van de *derde* en van de *eerste* soort. Doch men kan eenvoudiger herleiden, door aan te nemen

$$tang. \varphi = \frac{cot. \omega}{1-c^2} \, ;$$

want in deze vooronderstelling zal de berekening voeren tot:

$$\partial s = -\frac{(1-c^2)^{\frac{3}{2}} . \partial\omega}{\{1-c^2 \, (2-c^2) \, sin.^2 \omega\} \sqrt{(1-c^2 \, sin.^2 \omega)}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (20)$$

Het blijkt derhalve, dat de bogen van de beschouwde voetpunten-kromme lijn (men zou ze oneigenlijk *elliptische lemniscata* kunnen noemen) meetkundige voorstellingen zijn van *elliptische functiën* van de *derde soort*, hebbende een' *negatieven* parameter, welke begrepen zal wezen tusschen $-2c^2$ en -1. Volgens de formule (19) zou de parameter positief zijn; maar, gelijk in de theorie der elliptische functiën bewezen wordt, is de eene formule tot de andere herleidbaar met tusschenkomst eener goniometrische uitdrukking, even zoo als ook de functieën met negatieve parameters, grooter dan $-c^2$, herleidbaar zijn tot andere met parameters, die kleiner dan -1 zijn, doch bij tusschenkomst eener logarithmische uitdrukking.

Indien men de halve groote as p der oorspronkelijke ellips niet $= 1$ stelt, maar onbepaald laat, zal de formule (20) worden.

∂s

$$\partial s = -\frac{p^2 q^3 \,\partial\omega}{\{p^4-(p^4-q^4)\,sin.^2\omega\}\sqrt{\{1-\frac{p^2-q^2}{p^2}\,sin.^2\,\omega\}}} \quad . \ . \ . \ . \ (21)$$

Bijaldien de primitieve ellips een brandpunts-afstand heeft, juist gelijk aan de halve kleine as, wordt $c^2=\frac{1}{2}$, of $q^2=\frac{1}{2}p^2$, en alsdan is

$$\partial s = -\frac{p\,.\,\partial\omega\,.\,\frac{1}{4}\sqrt{2}}{(1-\frac{3}{4}\,sin.^2\,\omega)\sqrt{(1-\frac{1}{2}\,sin.^2\,\omega)}} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (22)$$

en in dit geval is derhalve de modulus der functie dezelfde als die der functie van de *eerste* soort, door middel van welke de rectificatie der bernouilliaansche lemniscata verkregen wordt, namelijk: modulus $=\sqrt{\frac{1}{2}}$.

Voor het quadrant der kromme lijn kan men, in de formulen (20) —(22), het negatieve teeken, vóór het tweede lid geplaatst, verwisselen met het positieve teeken, omdat de grenzen van ω zijn 0° en 90°, als die van den oorspronkelijken boog φ zijn 90° en 0°.

Maar voor het quadrant is nu ook de lengte afhankelijk van eene complete functie van de derde soort, en deze kan, volgens een theorema van LEGENDRE, berekend worden met behulp der functieën van de eerste en tweede soort. In de formule (20) is de parameter $-c^2(2-c^2)$, en wanneer $1-c^2=b^2$ wordt gesteld, zal b de complementaire modulus wezen; ergo wordt de parameter $=-(1-b^2)(1+b^2)=-(1-b^4)$ $=-1+b^4=-1+b^2.b^2$.

Wanneer de parameter eener functie van de derde soort is kleiner dan $-c^2$ en grooter dan -1, wordt hij voorgesteld onder den algemeenen vorm $-1+b^2.\,sin.^2\,\theta$; ergo is hier $sin.^2\,\theta=b^2$ en dus $sin.\,\theta=b$, $cos.\,\theta=c$. De formule nu van LEGENDRE voor de berekening eener complete functie van de derde soort, door middel van functieën der tweede en eerste soort, is, voor het geval dat de parameter tusschen de aangeduide negatieve grenzen ligt (1),

Π'

(1) Zie LEGENDRE *Traité des fonctions elliptiques*, Tome 1, art. 112, page 138, of ook VERHULST, *Traité élémentaire des fonctions elliptiques* § 56, page 103.

$$\Pi'(c) = F'(c) + \frac{\Delta(b,\theta)}{b^2 . sin.\theta . cos.\theta} \left\{ \tfrac{1}{2}\pi + [F'(c) - E'(c)]\, F(b,\theta) - F'(c)\, E(b,\theta) \right\}.$$

En deze toepassende op de formule (20), zoo komt voor de lengte van het quadrant der elliptische lemniscata

$$S = b^3 F'(c) + \frac{1}{c}\ \Delta(b,\theta) \left\{ \tfrac{1}{2}\pi + [F'(c) - E'(c)]\, F(b,\theta) - F'(c)\, E(b,\theta) \right\} \ .\ .\ (23)$$

In deze formule hebben F, E, F', E' de bekende beteekenissen, en $\Delta\,(b,\theta)$ is $= \sqrt{(1 - b^2\, sin.^2\theta)}$, en derhalve $= \sqrt{(1 - b^4)} = c\sqrt{(1 + b^2)}$.

Voor het bijzondere geval der formule (22), is $c = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$, $b = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$ en $\theta = 45°$; ergo is dan de lengte van het quadrant, als men de lengte p der halve groote as van de oorspronkelijke ellips onbepaald laat,

$$S' = \tfrac{1}{4} p \sqrt{2} . F'(\sqrt{\tfrac{1}{2}}) + \tfrac{1}{2} p \sqrt{6} \left\{ \tfrac{1}{2}\pi + [F'(\sqrt{\tfrac{1}{2}}) - E'(\sqrt{\tfrac{1}{2}})]\, F(\sqrt{\tfrac{1}{2}}, 45°) - F'(\sqrt{\tfrac{1}{2}})\, E(\sqrt{\tfrac{1}{2}}, 45°) \right\} \ .\ .\ .\ (24)$$

en deze formule laat zich nu, met behulp der elliptische tafelen van LEGENDRE, gemakkelijk, dat is onmiddellijk, zonder interpolatie, berekenen.

B. 2°. Is, in de oorspronkelijke vergelijking (1), $a^2 = b^2$, b^2 positief; α^6 verschillend van β^6, maar heeft β^6 het aftrekkings-teeken voor zich, dan is die vergelijking

$$(x^2 + y^2)^2 = \frac{\alpha^6}{a^4}\, x^2 - \frac{\beta^6}{a^4}\, y^2 ,$$

of, even als boven in de formule (16),

$$(x^2 + y^2)^2 = p^2 x^2 - q^2 y^2 \ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (25)$$

De kromme lijn is nu eene eigenlijke lemniscata, en zij is mede bekend als eene zoogenaamde voetpunten-kromme lijn; hare punten zijn namelijk de voetpunten der loodlijnen, getrokken uit het centrum eener hyperbola op derzelver tangenten, hebbende deze hyperbola eene eerste of werkelijke as $= 2p$ en eene dwarssche of imaginaire as $= 2q$. De as der lem-

lemniscata is mede $= 2p$; de raaklijnen, gaande door den knoop, zijn de asymptoten der hyperbola, en vormen dus met de as een hoek, wiens goniometrische tangens $= \frac{q}{p}$ is. Voor het geval der gelijkzijdige hyperbola is deze hoek een halve regte hoek, en de lemniscata is dan dezelfde als die van BERNOUILLI; dit geval heeft derhalve plaats als $a^2 = b^2$, β^6 negatief, en $\beta^6 = \alpha^6$ is.

De poolvergelijking dezer lemniscata is

$$r^2 = p^2 - (p^2 + q^2) \sin.^2 \varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

of, de excentriciteit der hyperbola $= 1$ stellende,

$$r^2 = p^2 - \sin.^2 \varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

De formule (8) voor de inhoudsberekening zal geven, vermits de grenzen van den boog φ zijn 0 en *boog tang.* $\left(= \frac{q}{p}\right)$,

$$\mathrm{I} = \tfrac{1}{2} (p^2 + q^2) \sin. 2 \left[boog\, tang. \left(\frac{q}{p}\right)\right] + (p^2 - q^2)\, boog\, tang. \left(\frac{q}{p}\right)$$

$$= pq + (p^2 - q^2)\, boog\, tang. \left(\frac{q}{p}\right), \quad \ldots \quad (28)$$

welke uitdrukking bekend is, en overgaat in p^2 voor de lemniscata van BERNOUILLI.

Voor de rectificatie is, uit de formule (9),

$$\partial s = \frac{\partial \varphi \{p^4 - (p^4 - q^4) \sin.^2 \varphi\}}{\sqrt{\{p^2 - (p^2 + q^2) \sin.^2 \varphi\} \{p^4 - (p^4 - q^4) \sin.^2 \varphi\}}} .$$

De herleiding wordt verkregen door te stellen $tang.\, \varphi = \frac{p^2}{q^2}\, tang.\, \psi$, waardoor men zal vinden

$$\partial s = \frac{p^3 q^3 \partial \psi}{\{q^4 + (p^4 - q^4) \sin.^2 \psi\} \sqrt{\{q^2 - (p^2 + q^2) \sin.^2 \psi\}}} ;$$

 hier-

hierin $\quad sin.^2\,\psi = \frac{q^2}{p^2+q^2}\,sin.^2\,\omega$ stellende, komt er eindelijk:

$$\partial s = \frac{p^3\,q}{\sqrt{(p^2+q^2)}} \cdot \frac{\partial\,\omega}{\{q^2+(p^2-q^2)\,sin.^2\,\omega\}\sqrt{\{1-\frac{q^2}{p^2+q^2}sin.^2\,\omega\}}} \quad . . (29)$$

Neemt men de excentriciteit als éénheid, of $(p^2+q^2)=1$, zoo is

$$\partial s = p^3 \cdot \sqrt{(1-p^2)} \cdot \frac{\partial\,\omega}{[(1-p^2)+(2p^2-1)sin.^2\,\omega]\sqrt{\{1-(1-p^2)sin.^2\,\omega\}}}$$

$$= \frac{q^2}{\sqrt{(1-p^2)}} \cdot \frac{\partial\,\omega}{\left\{1+\frac{2\,p^2-1}{1-p^2}\,sin.^2\,\omega\right\}\sqrt{\{1-(1-p^2)\,sin.^2\,\omega\}}} \quad . . . (30)$$

Stelt men de ware as der hyperbola $=2$, dat is $p=1$, en verder $\frac{q^2}{p^2+q^2} = \frac{q^2}{1+q^2} = \gamma^2$, zoo gaat de formule (29) over in deze meer eenvoudige

$$\partial s = \frac{(1-\gamma^2)}{\gamma} \cdot \frac{\partial\,\omega}{\left\{1+\frac{1-2\,\gamma^2}{\gamma^2}\,sin.^2\,\omega\right\}\sqrt{\left\{1-\gamma^2\,sin.^2\,\omega\right\}}} \quad . . . . . . (29^*)$$

Het blijkt derhalve, dat de bogen der hier beschouwde lemniscata meetkundige voorstellingen zijn van elliptische functiën der derde soort. De *modulus* γ kan elke waarde hebben tusschen 0 en 1. De *amplitudo* ω kan zich niet uitstrekken van 0 tot 90°; want

$$sin.^2\,\omega = \frac{p^2+q^2}{q^2} \cdot sin.^2\,\psi$$

$$= \frac{p^2+q^2}{q^2} \cdot \frac{q^4\,.\,tang.^2\,\varphi}{p^4+q^4\,.\,tang.^2\,\varphi},$$

en daar de grenswaarde van $tang.\,\varphi$ is $=\frac{q}{p}$, zoo wordt die van

sin.

$$sin.^2\,\omega = \frac{p^2+q^2}{q^2}\cdot\frac{q^6}{p^6+q^6} = \frac{\gamma^4}{1-3\gamma^2(1-\gamma^2)},$$

welke alleenlijk voor $p=q$, dat is alleenlijk bij de gelijkzijdige hyperbola, $=1$ kan worden. Het is dan ook hierom, dat de berekening der lengte van het lemniscatisch quadrant niet geschieden kan door middel der complete functie van de derde soort, althans niet onmiddelijk; want wel is waar, dat men, door in de formule (29*) te stellen

$$sin.^2\,\omega = \frac{\gamma^4}{1-3\gamma^2(1-\gamma^2)}\,sin.^2\,\lambda,$$

dezelve herleidt tot eene andere, in welke de grens van het argument λ is $90°$, maar die andere formule is zamengestelder, en moet op hare beurt wederom tot elliptische integralen gebragt worden.

De parameter $\frac{1-2\gamma^2}{\gamma^2}$ kan zoowel positief als negatief zijn. Zoo lang γ^2 is $<\frac{1}{2}$ is deze parameter steeds positief. Voor $\gamma^2=\frac{1}{2}$ is hij *nul*; de functie van de derde soort gaat over in eene van de eerste soort; p wordt $=q$; en de formule (29*) is alsdan de bekende rectificatie-formule voor de gewone lemniscata. Wordt $\gamma^2<\frac{1}{2}$, zoo is de parameter >0, maar de grens voor de amplitudo ω wordt kleiner. Voor $\gamma^2=\frac{1}{3}$, heeft men een parameter $=1$, en $q^2=\frac{1}{2}p^2$. Voor γ^2 minder en minder dan $\frac{1}{3}$, wordt q kleiner en kleiner dan p, maar de parameter wordt grooter en grooter dan één. Dit aangroeijen heeft geene grenzen; de figuur der lemniscata wordt, bij het langer en langer worden van hare as in vergelijking van hare hoogte, meer en meer uitgerekt, en nadert de regtlijnige rigting van hare as.

Bijaldien $\gamma^2>\frac{1}{2}$ wordt, zal de parameter negatief zijn; evenwel zal deszelfs waarde niet tot het oneindig negatief kunnen toenemen; want voor γ^2 nabij $=1$, wordt de parameter nabij $=-1$, en zijne waarden liggen dus tusschen 0 en -1. In dit geval der negatieve parameters behooren de lemniscaten tot hyperbolen, welker eerste assen $2p$ kleiner zijn dan de

twee

tweede assen $2q$, en welke alzoo geacht kunnen worden te zijn de overeenstemmende of verwante hyperbolen van die, welker eerste assen $2p$ grooter zijn dan de tweede assen $2q$. Denkt men inderdaad bij elke hyperbola, tot welke eenige lemniscata behoort, tevens de overeenstemmende of verwante hyperbola (in de supplements-hoeken der asymptoten), zoo behoort ook tot deze eene lemniscata. Er bestaan, zoo doende, twee stelsels van lemniscaten, die men overeenstemmende, verwante, of ook wel *complementaire lemniscaten* zou kunnen heeten. Van het eerste stelsel hebben de rectificatie-formulen *moduli* kleiner dan $\frac{1}{2}$, *amplitudines*, welker grenzen beneden 45° blijven, en positieve *parameters*. Van het tweede stelsel zijn de *moduli* der functieën van de overeenkomstige lemniscaten juist de *complementen* $(\sqrt{(1-\gamma^2)})$ van de moduli der functiën van de lemniscaten des eersten stelsels, en de grenzen der *amplitudines* zijn mede de *complementen* der grenzen van de eerstgenoemde amplitudines; maar de *parameters* der functieën van het tweede lemniscaten-stelsel zijn negatief.

Zoo men derhalve voor eenige lemiscata heeft $tang.\,\varphi = \frac{q}{p}$, zal voor de complementaire lemniscata $tang.\,\varphi = \frac{p}{q}$ wezen. Deze wederkeerigheid levert eene eenvoudige betrekking tusschen de inhouden der beide lemniscaten op; want, door middel der formule (28), zal men bevinden: dat het verschil tusschen die inhouden gelijk is aan $\frac{1}{2}\pi\,(p^2 - q^2)$. Voor de lengte der bogen bestaat dergelijk eenvoudig verband niet.

B. 3°. Men kan nog opmerken het geval van $a^2 = b^2$, maar b^2 negatief, zoodat $a^2 + b^2 = 0$ zij; doch om eene eenvoudige en belangrijke uitkomst te verkrijgen, moet men nog aannemen $\alpha^6 = \beta^6$.

De vergelijkingen der kromme lijn worden, bij deze hypothesen,

$(x^2$

$$(x^2-y^2)^2 = p^2(x^2+y^2)\,, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (31)$$

$$\left.\begin{aligned} r^2 &= \frac{p^2}{cos.^2\,2\varphi}\,, \\ r &= \pm\frac{p}{cos.\,2\varphi}\,. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (32)$$

De kromme lijn is hyperbolisch en niet onbekend. Zij bestaat uit *vier* hyperbolische takken, rondom den oorsprong der coördinaten regelmatig gelegen, even als eene gelijkzijdige hyperbola en hare overeenstemmende (hyperbola), zoodat ook de lijnen, gaande door den oorsprong en makende halve regte hoeken met de assen, asymptoten van de vier takken zijn.

De rectificatie-formule geeft tot uitkomst:

$$\partial s = \tfrac{1}{2}p\,.\,\frac{\partial\,.\,2\varphi}{cos.^2\,2\varphi}\,\sqrt{(1+3\,sin.^2\,2\varphi)}\,;$$

dat is, stellende $2\varphi = 90^\circ - \psi$,

$$\partial s = -p\,.\,\frac{\partial\psi}{sin.^2\,\psi}\,\sqrt{(1-\tfrac{3}{4}\,sin.^2\,\psi)} \quad \ldots\ldots\ldots (33)$$

waaruit

$$s = p\,\{-\tfrac{1}{4}F(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,,\psi) + E(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,,\psi) + cot.\,\psi\,.\,\Delta(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,,\psi)\} \quad .\,.\, (34)$$

In deze formule zijn de grenswaarden van ψ *nul* en 90°, of *nul* en $\frac{1}{2}\pi$; Δ heeft de gewone beteekenis $=\sqrt{(1-\frac{3}{4}\,sin^2\,.\,\psi)}$. De formule geldt slechts voor een' der halve takken in eenig octant; voor de geheele uitgestrektheid van $\psi = 0$ tot $\psi = \frac{1}{2}\pi$, dat is, van $\varphi = \frac{1}{4}\pi$ tot $\varphi = 0$ wordt s, zoo als behoort, oneindig.

De omgekeerde kromme dezer hyperbola van de tweede orde zal een lemniscatischen vorm hebben. Evenwel is zij eene lemniscata met vier strikken, hoedanige hier minder opzettelijk overwogen worden; hare orthogonale coördinaten-vergelijking is ook van den zesden graad; zij is dus eene lemniscata van de tweede orde, en zou, wegens den vorm der vergelijking (eenigzins overeenkomende met dien der cubische parabola), *cubische lem-*

 nis-

niscata kunnen genoemd worden. Den parameter p als eenheid beschouwende, zoo is de polaire coördinaten-vergelijking

$$\rho = \pm p \,.\, cos.\, 2\varphi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (35)$$

Maar indien men de asymptoten der oorspronkelijke hyperbolische kromme als coördinaten-assen aanneemt (en deze zijn tevens de raaklijnen, gaande door den knoop der lemniscata), dan heeft men

$$\rho = \pm p \,.\, sin.\, 2\varphi \,,$$

en onder dezen vorm is de kromme lijn bekend, als tot eene kromme lijn van de vijfde orde te behooren. De inhoud van eenigen sector is bepaald door de uitdrukking $\frac{1}{4} p^2 \{\frac{1}{4} sin.\, 4\varphi + \varphi\}$, en dus wordt de inhoud van een der vier lemniscatische strikken $\frac{1}{8} p^2 \pi$, dat is gelijk aan den halven cirkel, op de halve as p als middellijn beschreven.

De rectificatie geeft, met dezelfde notatie als boven voor de hyperbolische kromme lijn,

$$\partial s = -p\, \partial\psi \sqrt{(1 - \tfrac{3}{4} sin.^2 \psi)}, \text{ en } s = -p\, \mathrm{E}(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}, \psi) \quad . \; . \; (36)$$

Ergo heeft deze lemniscata het merkwaardige, dat, voor den modulus $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ (hebbende alzoo tot hoek een' hoek van 60°), hare bogen eenvoudige meetkundige voorstellingen zijn van de gewone elliptische functieën der tweede soort; de lengte van een' der octanten is dan ook $= \mathrm{E}'(\frac{1}{2}\sqrt{3})$.

Er bestaat eene blijkbare overeenkomst of verwantschap tusschen deze uitkomsten, en die, welke tot de gewone lemniscata en gelijkzijdige hyperbola betrekking hebben. De vergelijkingen namelijk van de gelijkzijdige hyperbola en van de lemniscata, die hare omgekeerde is, zijn, als men de excentriciteit der hyperbola $= 1$ stelt:

$$r'^2 = \tfrac{1}{2} \,.\, \frac{1}{cos.\, 2\varphi'} \quad : \quad \rho'^2 = \tfrac{1}{2} \,.\, cos.\, 2\varphi' \,,$$

waaruit gevonden wordt, zoo men $cos.\, 2\varphi' = cos.^2 \psi'$ stelt:

1°

1° Voor de lengte van een' boog der hyperbola, gerekend van eenige waarde van ψ' tot $\psi' = 0$, dat is tot aan den top der hyperbola,

$$s' = tang.\,\psi'\,\Delta(\sqrt{\tfrac{1}{2}}\,,\psi') - \mathrm{E}(\sqrt{\tfrac{1}{2}}\,,\psi') + \tfrac{1}{2}\mathrm{F}(\sqrt{\tfrac{1}{2}}\,,\psi')\,.$$

2° Voor de lengte van een' boog der lemniscata, bij dezelfde amplitudo,

$$s' = \tfrac{1}{2}\mathrm{F}(\sqrt{\tfrac{1}{2}}\,,\psi')\,.$$

Minder lettende op de coëfficienten, of op de moduli, dan wel op den vorm der vergelijkingen, zoo blijkt, dat de formulen voor de lengte der bogen van de gewone gelijkzijdige hyperbola en van die, welke hier genoemd is van de tweede orde, genoegzaam dezelfde gedaante hebben. Alleenlijk komt in de eerste *tang.* ψ' voor, en in de tweede de omgekeerde waarde *cot.* ψ', en in de eerste zijn de teekens van F en E tegengesteld aan die van F en E in de tweede; maar in de tweede wordt ook de amplitudo ψ' juist in eene tegengestelde rigting gerekend. Gelijk verder, in de rectificatie-formule der gelijkzijdige hyperbola, een term voorkomt $\frac{1}{2}\mathrm{F}(\sqrt{\frac{1}{2}}\,,\psi')$, welke de rectificatie der overeenkomstige lemniscata geeft, zoo is er ook in de rectificatie-formule der hyperbola van de tweede orde een term $\mathrm{E}(\frac{1}{2}\sqrt{3}\,,\psi)$, welke de lengte eens boogs van even groote amplitudo der met deze hyperbola overeenstemmende lemniscata voorstelt.

Bij de gewone hyperbola (ongelijkzijdige) en lemniscata is

$$\rho_, \,. = r_, \,.\, cos.\, 2\,\varphi\ ;$$

trekt men nu tot het punt der hyperbola, hebbende den voerstraal $r_,$, en de polaire abscis φ, eene raaklijn, en laat men, uit den oorsprong, op deze raaklijn eene loodlijn neder, zoo is het voetpunt dezer loodlijn een punt der lemniscata, en deze loodlijn $\rho_,$ maakt dus, aan de andere zijde der as van de lemniscata, een' hoek φ met dezelve, gelijk aan den hoek, welken de voerstraal $r_,$, aan gene zijde, met de as maakt. Hieruit volgt, dat de punten der lemniscata kunnen verkregen worden, zonder het trekken van raaklijnen tot de hyperbola. Men trekke namelijk uit het centrum der hyperbola, aan elke zijde der as, een' voerstraal, elk een' hoek φ met de as makende. Zoo men dan, uit het snijpunt van elken voerstraal met

 de

de hyperbola, eene loodlijn op den anderen der beide voerstralen laat vallen, zal het voetpunt een punt der lemniscata wezen, en men verkrijgt dus, op deze wijze, steeds vier symmetrische punten der lemniscata, indien de voerstralen ook naar den anderen tak der hyperbola verlengd gedacht worden.

Hoezeer nu de punten der lemniscata van de tweede orde niet eveneens, door middel der overeenkomstige hyperbola van de tweede orde, verkregen worden, bestaat er toch eenige overeenkomst in de constructie. Men heeft namelijk de punten dezer lemniscata, door eerst te werk te gaan als boven bij de constructie der gewone lemniscata, en alsdan uit de voetpunten der getrokkene loodlijnen wederom andere loodlijnen op de tegenovergestelde voerstralen der hyperbola van de tweede orde te laten vallen; de voetpunten dezer laatste loodlijnen zullen punten der lemniscata van de tweede orde zijn. Want uit de vergelijkingen der beide kromme lijnen (lemnisc. en hyperb.) heeft men deze eenvoudige betrekking tusschen derzelver voerstralen

$$\rho = r\, cos.^2\, 2\varphi = (r\, .\, cos.\, 2\varphi)\, .\, cos.\, 2\varphi\, .$$

De eerste factor is de uitdrukking der projectie van den voerstraal r op den overeenkomstigen voerstraal r aan de andere zijde van de as, en deze uitdrukking vermenigvuldigd met den tweeden factor, geeft de uitdrukking der genoemde projectie wederom geprojecteerd op den eersten voerstraal r, aan de eerste zijde der as van de hyperbola der tweede orde getrokken.

In de rectificatie-formule der gewone gelijkzijdige hyperbola beteekent de term $tang.\, \psi' \Delta (\sqrt{\tfrac{1}{2}}, \psi')$ de lengte van het gedeelte der raaklijn van de hyperbola, gerekend van het punt der hyperbola, overeenkomende met de amplitudo ψ', tot het voetpunt der loodlijn, uit den oorsprong op deze tangens nedergelaten. In de rectificatie-formule (34) der hyperbola van de tweede orde, hier beschouwd wordende, heeft de term $cot.\, \psi\, .\, \Delta (\tfrac{1}{2}\sqrt{3}, \psi)$ wel niet volstrekt dezelfde beteekenis, maar de stelkundige uitdrukking voor de

de lengte van het gelijksoortige deel eener raaklijn, wordt toch uit de bestanddeelen van dezen term gevonden; want de stelkundige waarde van dit deel is $= \frac{cot.\psi}{\Delta}$, en de vorm is dus de omgekeerde van dien des bovengenoemden terms der rectificatie-formule van de gelijkzijdige hyperbola.

Een verder voortgezet onderzoek zou waarschijnlijk andere punten van overeenkomst tusschen de beide hyperbolen en lemniscaten leeren kennen, en het onderzoek der eigenschappen van de lemniscata ten opzigte van hare gelijke bogen, sommen of verschillen van bogen, multiplicatie en divisie of partitie van bogen, zou stellig, even als voor de bernouilliaansche lemniscata, belangrijke uitkomsten geven. Ik bepaal mij evenwel alleenlijk tot de navolgende niet onbelangrijke beschouwing.

De amplitudo ψ moet gerekend worden van *nul* tot $\frac{1}{2}\pi$, indien de polaire abscis φ gerekend wordt van $\frac{1}{4}\pi$ tot 0. Maar bij het integreren tusschen grenzen kan men de orde der grenzen omkeeren, zoo men slechts de teekens der termen, die geintegreerd worden, verandert. Men kan derhalve voor de rectificatie-formulen der hyperbola en der lemniscata van de tweede orde, welke hier beschouwd worden, stellen (gemakshalve den parameter $p = 1$ nemende, en den modulus $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ niet schrijvende)

$$s = \{\tfrac{1}{4}F(\psi) - E(\psi) - cot.\psi.\Delta(\psi)\},$$

$$s = E(\psi).$$

Men neme nu op de lemniscata twee bogen, gerekend van een' der toppen (b. v. van af den regtschen top), en hebbende φ_1 en φ_2 tot polaire abscissen, zoo is het verschil in lengte dezer bogen een enkele boog s_1, welks lengte gevonden wordt door de formule

$$s_1 = E(\psi_1) - E(\psi_2),$$

zijnde $\psi_1 = 90° - 2\varphi_1$ en $\psi_2 = 90° - \varphi_2$. Voor een' boog s_1 der hyperbola, welks einden door dezelfde voerstralen, en dus ook door dezelfde polaire abscissen bepaald zijn, is tevens:

$$s_1 = \tfrac{1}{4}\{F(\psi_1)-F(\psi_2)\}-\{E(\psi_1)-E(\psi_2)\}-\{\Delta(\psi_1)cot.\psi_1-\Delta(\psi_2)cot.\psi_2\}.$$

Voor een' anderen boog s_2 der lemniscata, en voor den overeenkomstigen boog der hyperbola, beide bepaald tusschen twee voerstralen, welker polaire abscissen zijn φ'_1 φ'_2, zal men eveneens hebben

$$s_2 = E(\psi'_1) - E(\psi'_2),$$

$$s_2 = \tfrac{1}{4}\{F(\psi'_1) - F(\psi'_2)\} - \{E(\psi'_1) - E(\psi'_2)\}$$
$$- \{\Delta(\psi'_1)\,cot.\,\psi'_1 - \Delta(\psi'_2)\,cot.\,\psi'_2\}.$$

Noemende nu σ het verschil der bogen s_1 en s_2 van de lemniscata, en σ' het verschil der bogen s_1 en s_2 van de hyperbola, zoo heeft men

$$\sigma = \{E(\psi_1) + E(\psi'_2)\} - \{E(\psi_2) + E(\psi'_1)\},$$

$$\sigma' = \tfrac{1}{4}\{F(\psi_1)+F(\psi'_2)\} - \tfrac{1}{4}\{F(\psi_2)+F(\psi'_1)\} - \{E(\psi_1)+E(\psi'_2)\}$$
$$+ \{E(\psi_2) + E(\psi'_1)\} - \{\Delta(\psi_1)\,cot.\,\psi_1 + \Delta(\psi'_2)\,cot.\,\psi'_2\}$$
$$+ \{\Delta(\psi_2)\,cot.\,\psi_2 + \Delta(\psi'_1)\,cot.\,\psi'_1\}.$$

Maar indien men stelt (de modulus steeds $= \frac{1}{2}\sqrt{3}$ zijnde)

$$cos.\,\mu_1 = cos.\,\psi_1\,cos.\,\psi'_2 - sin.\,\psi_1\,sin.\,\psi'_2\,.\,\Delta(\mu_1),$$
$$cos.\,\mu_2 = cos.\,\psi_2\,cos.\,\psi'_1 - sin.\,\psi_2\,sin.\,\psi'_1\,.\,\Delta(\mu_2),$$

zal men, volgens de theorie der elliptische functieën, hebben

$$F(\psi_1)+F(\psi'_2)=F(\mu_1)\ ;\ E(\psi_1)+E(\psi'_2)=E(\mu_1)+\tfrac{3}{4}sin.\mu_1\,sin.\psi_1\,sin.\psi'_2,$$
$$F(\psi_2)+F(\psi'_1)=F(\mu_2)\ ;\ E(\psi_2)+E(\psi'_1)=E(\mu_2)+\tfrac{3}{4}sin.\mu_2\,sin.\psi_2\,sin.\psi'_1.$$

Ergo

$$\sigma = E(\mu_1) - E(\mu_2) + \tfrac{3}{4}\{sin.\mu_1\,sin.\psi_1\,sin.\psi'_2 - sin.\mu_2\,sin.\psi_2\,sin.\psi'_1\},$$

$$\sigma' = \tfrac{1}{4}\{F(\mu_1)-F(\mu_2)\} - \sigma - \{\Delta(\psi_1)\,cot.\psi_1 + \Delta(\psi'_2)\,cot.\psi'_2\}$$
$$+ \{\Delta(\psi_2)\,cot.\,\psi_2 + \Delta(\psi'_1)\,cot.\,\psi'_1\}.$$

Nu kan men de amplitudines ψ_1 en ψ'_2 zoodanig nemen, dat de functieën $F(\psi_1)$ en $F(\psi'_2)$ complementair zijn. Alsdan is $F(\mu_1) = F'(\frac{1}{2}\sqrt{3})$ en $\mu_1 = \frac{1}{2}\pi$. Met de beide andere bogen ψ_2 en ψ'_1 kan dit eveneens geschieden. Ergo $F(\mu_1) = F(\mu_2)$ en $E(\mu_1) = E(\mu_2)$, en er komt derhalve

$\sigma =$

$$\sigma = \tfrac{3}{4}\left\{sin.\psi_1\, sin.\psi'_2 - sin.\psi_2\, sin.\psi'_1\right\},$$

$$\sigma' = \left\{\Delta(\psi'_1)cot.\psi'_1 + \Delta(\psi_2)cot.\psi_2\right\} - \left\{\Delta(\psi_1)cot.\psi_1 + \Delta(\psi'_2)cot.\psi'_2\right\} - \sigma.$$

Men heeft alsdan ook, vermits het complement b van den modulus c gelijk is aan $\sqrt{(1-\frac{3}{4})} = \frac{1}{2}$,

$$\tfrac{1}{2}\, tang.\psi_1\, tang.\psi'_2 = 1 \quad ; \quad \tfrac{1}{2}\, tang.\psi_2 \,.\, tang.\psi'_1 = 1\,;$$

$$sin.\psi'_2 = \frac{cos.\psi_1}{\Delta(\psi_1)}\,;\; sin.\psi'_1 = \frac{cos.\psi_2}{\Delta(\psi_2)}\,;\; \Delta(\psi'_2) = \frac{1}{2\Delta(\psi_1)}\,;\; \Delta(\psi'_1) = \frac{1}{2\Delta(\psi_2)}\,.$$

Derhalve

$$\sigma = \tfrac{3}{4}\left\{\frac{sin.\,2\,\psi_1}{2\Delta(\psi_1)} - \frac{sin.\,2\,\psi_2}{2\Delta(\psi_2)}\right\},$$

$$\sigma' = \left\{\Delta\,(\psi_2)\,cot.\,\psi_2 + \tfrac{1}{2}\,tang.\,\psi_2\,.\,\frac{1}{2\,\Delta\,(\psi_2)}\right\}$$

$$- \left\{\Delta\,(\psi_1)\,cot.\,\psi_1 + \tfrac{1}{2}\,tang.\,\psi_1\,.\,\frac{1}{2\,\Delta\,(\psi_1)}\right\} - \sigma$$

$$= \left\{\Delta\,(\psi_2)\,cot.\,\psi_2 + \frac{1}{4\,\Delta\,(\psi_2)\,cot.\,\psi_2}\right\}$$

$$- \left\{\Delta\,(\psi_1)\,cot.\,\psi_1 + \frac{1}{4\,\Delta\,(\psi_1)\,cot.\,\psi_1}\right\} - \sigma\,.$$

Men besluit diensvolgens dat, zoo men op de lemniscata twee bogen neemt, in voege dat de complementen der dubbelde polaire abscissen $(90° - 2\varphi)$ van elk paar *niet* overeenstemmende uiteinden (ψ_1, en ψ'_2; ψ'_1 en ψ_2), de amplitudines zijn van twee complementaire elliptische functieën der eerste soort, hebbende $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ tot modulus, alsdan het verschil, zoowel van deze bogen als van de overeenkomstige eveneens bepaalde bogen der hyperbolische kromme, eene stelkundige uitdrukking tot waarde zal hebben, of, anders gezegd, rectifiabel zal wezen. De eene boog op de lemniscata, heb-

hebbende φ_1 en φ_2 tot polaire abscissen van uiteinden, kan naar welgevallen genomen worden, en de abscissen der uiteinden van den anderen boog worden alsdan, met behulp der vorenstaande betrekkingen, gevonden.

Men kan ook zeggen: zoo op de lemniscata twee bogen genomen worden, welker verschil is rectifiabel en tevens bepaald door de stelkundige uitdrukking der bovenstaande waarde van σ, dan zal het verschil der overeenkomstige hyperbolische bogen mede rectifiabel zijn en bepaald door de uitdrukking der waarde van σ'.

Deze eigenschap heeft overeenkomst met eene eigenschap der gewone lemniscata, door CHASLES opgemerkt, en blootelijk vermeld in een der bladen van de *comptes rendus* over den jare 1845, namelijk: zoo op eene bernouilliaansche lemniscata twee bogen genomen worden, welke even groot zijn, of, welker verschil $=0$ is, zal het verschil der overeenkomstige bogen van de overeenstemmende gelijkzijdige hyperbola rectifiabel zijn; deze eigenschap is derhalve, als het ware, een bijzonder geval van de bewezene.

In plaats van het verschil, zou men ook de som van twee bogen kunnen beschouwen; doch ik wil thans niet langer bij dit punt verwijlen.

C. Het laatste geval van voorgestelde herleiding is dat van $a^2=0$ of $b^2=0$, bij voorbeeld $b^2=0$, en $\beta^2=-\alpha^2$ (*), dat is, in de oorspronkelijke vergelijking (1), $\beta^6=-\alpha^6$. Deze vergelijking wordt daardoor

a^4

---

(2) Indien $\beta^2=+\alpha^2$, of wel $\beta^6=+\alpha^6$ is, ontstaat de vergelijking

$$x^4=p^2(x^2+y^2).$$

De kromme lijn, tot welke deze vergelijking betrekking heeft, is daarom in de algemeene beschouwingen in den tekst niet overwogen, wijl haar vorm niet lemniscatisch, en hare rectificatie eindig is. Het is eene kromme lijn, hebbende twee takken met parabolische asymptoten, verbonden door eene as, welker lengte is $2p$. Hare poolvergelijking is:

$$a^4 x^4 = \alpha^6 (x^2 - y^2) ,$$

of, als boven $\frac{\alpha^6}{a^4} = p^2$ stellende,

$$x^4 = p^2 (x^2 - y^2) \; , \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; (37)$$

waarmede, door de vergelijking (4), overeenstemt,

$$r^2 = p^2 \cdot \frac{cos.\, 2\,\varphi}{cos.^4\, \varphi} = 4\, p^2 \, \frac{cos.\, 2\,\varphi}{(1 + cos.\, 2\,\varphi)^2} \; \ldots\ldots \; (38)$$

De

$$r = \pm \frac{p}{cos.^2\, \varphi} ,$$

en deze, zoowel als de vergelijking op orthogonale coördinaten, kunnen geacht worden begrepen te zijn in de vergelijkingen (10) en (11), sub A overwogen. Ingevolge de poolvergelijking heeft men deze zeer eenvoudige constructie der kromme lijn. Trek, door het einde der halve as p eene onbepaalde loodlijn; verder, boven en onder de as, twee onbepaalde voerstralen, makende gelijke hoeken φ met de as; breng het gedeelte van een dezer voerstralen, begrepen tusschen den oorsprong en de zoo even genoemde loodlijn, met een' cirkelboog op de as over, en trek, door het uiteinde dezer overgebragte lengte, wederom eene loodlijn door de as; de punten, in welke zij de beide voerstralen snijdt, zullen punten van de kromme lijn wezen, welke men vervolgens op de negatieve rigtingen der voerstralen kan overbrengen, om de overeenstemmende punten van den anderen tak der kromme te verkrijgen.

De inhoud van eenigen polairen sector volgt niet dadelijk uit de vergelijking (8), maar door den gewonen regel op de poolvergelijking toe te passen, zal worden verkregen:

$$\mathrm{I} = \tfrac{1}{2} p^2 \; (tang.\, \varphi + \tfrac{1}{3}\, tang.^3\, \varphi) \; ,$$

en dus, b. v. voor $\varphi = 45°$, $\mathrm{I} = \frac{2}{3} p^2$, waarmede zal overeenstemmen voor den inhoud van het halve hyperbolisch segment, hebbende $(r\, cos.\, \varphi - p)$ tot pijl, $\mathrm{I}' = \frac{1}{3} p^2$.

Voor de rectificatie vindt men, hetzij met formule (9), hetzij regtstreeks uit de poolvergelijking,

$$\partial s = p \,.\, \partial\, tang.\, \varphi \,.\; \sqrt{(1 + 4\, tang.^2\, \varphi)} \; ,$$

$$s = \tfrac{1}{2} p \left\{ tang.\, \varphi \sqrt{(1 + 4\, tang.^2\, \varphi)} + \tfrac{1}{2}\, Log. \left[2\, tang.\, \varphi + \sqrt{(1 + tang.^2\, \varphi)} \right] \right\} .$$

Eenvoudiger is de uitdrukking, wanneer men, hetzij in deze, hetzij in de voorgaande, $2\; tang.\, \varphi = tang.\, \psi$ stelt; men heeft alsdan:

$$s = \tfrac{1}{4} p \left\{ tang.\, \psi \;\, sec.\, \psi + Log.\, tang.\, (45° + \tfrac{1}{2} \psi) \right\} .$$

E

De vergelijking (37) is een bijzondere vorm van de vergelijking (14), en, even als deze, heeft zij betrekking tot eene lemniscatische kromme lijn, van welke — omdat y^2, in de nabijheid van den knoop, hoogstens $= x^2$ kan zijn, of ook, op oneindig kleinen afstand van den knoop, werkelijk $y^2 = x^2$ zal wezen — de tangenten, die door den knoop gaan, een' halven regten hoek met de as $2p$ zullen maken, zoo als dit bij de lemniscata van Bernouilli plaats heeft.

Men heeft deze lemniscata lang gekend, doch ik vind er niets meer van aangeteekend dan eene constructie en de quadratuur. Wel staat mij voor, ergens gelezen te hebben, dat FAGNANO zich met hare beschouwing zou onledig gehouden hebben, doch het voorname geschrift van FAGNANO, *Produzzioni mathematiche* (1750), is mij nimmer onder de oogen geweest. Dat ook FAGNANO de rectificatie in genoegzame volledigheid zou behandeld hebben, komt mij zelfs zeer twijfelachtig voor. Ook EULER, die in de *Novi Comment. petropolit.*, tomo VI, over de lemniscata van Bernouilli (zoo verre hare rectificatie aangaat) geschreven heeft, en meermalen op den arbeid van FAGNANO verwijst, gewaagt van de hier bedoelde lemniscata niet.

CRAMER bedient zich van deze lemniscata in zijn werk: *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébrigues* (page 495), bij de verklaring van het gebruik der kromme lijnen in de methode der maxima en minima, en wel in het voorbeeld, om de halve hoogte te vinden van den grootsten regthoek, die in een gegeven cirkel kan beschreven worden. Want den straal van dezen cirkel p noemende, en den inhoud des regthoeks $4py$, zoo komt men tot eene aequatie, welke den vorm (37) kan aannemen.

Wat de constructie aanbelangt, men kent deze zeer eenvoudige: Trek in den cirkel, welks straal is p, eene middellijn als *as* der lemniscata; door dezelve eene loodregte koorde; verder een' straal, gaande door een der uiteinden van deze koorde; daarna uit het snijpunt der koorde met de as eene loodlijn op dezen straal getrokken, en de lengte dezer loodlijn, met een'

een' cirkelboog, op de positieve en negatieve rigtingen der koorde, overgebragt hebbende, zoo verkrijgt men twee punten der lemniscata (*).

De inhoud der kromme lijn kan niet door de formule (8) gevonden wor-

(*) Ook kan men deze eenvoudige constructie uit de vergelijking (37) afleiden. Beschrijf op de halve as p een' halven cirkel. Trek uit een der einden van de middellijn p eene willekeurige koorde, en uit het andere einde dezer koorde eene loodlijn op de middellijn p, zoo men dan die koorde aanneemt te zijn de abscis x, zal deze loodlijn de ordinaat y wezen.

De lemniscata van Bernouilli kan op onderscheidene wijzen geconstrueerd worden. Het is niet moeijelijk om andere constructieën aan te wijzen, dan de gewone en bekende. Ik acht zulks van minder belang; doch kan niet nalaten te doen opmerken, dat de zoo pas opgegevene constructie mede op de lemniscata van Bernouilli toepasselijk is, en wel omdat de vergelijking dezer laatste tot den vorm der vergelijking (37) kan gebragt worden, door een ander stelsel van coördinaten te bezigen. Neemt men namelijk de scheefhoekige coördinaten onder de as $2p$ en eene der tangenten, gaande door den knoop, zoo heeft men assen, die elkander onder een' hoek van 45° snijden, en wanneer men de coördinaten ten opzigte van deze assen noemt ξ en η, zoo herleidt men de vergelijking der lemniscata van Bernouilli, welke voor de regthoekige assen is

$$(x^2+y^2)^2 = r^4 = p^2 \ (x^2-y^2) \ ,$$

tot deze andere,

$$r^4 = p^2 \, (\xi^2 + \xi\eta \, \sqrt{2}) \, ;$$

en deze is wederom

$$r^4 = p^2 \, (\xi^2 + \xi\eta \, \sqrt{2} + \eta^2 - \eta^2) = p^2 \, (r^2 - \eta^2) \ .$$

Deze æquatie drukt alzoo een zelfde verband uit tusschen r en η, hoedanig de vergelijking (37) tusschen x en y. Ergo kunnen, bij aanwending van het genoemd scheefhoekig stelsel, r en η geconstrueerd worden, zoo als boven, ten aanzien der coördinaten x en y van de andere lemniscata is voorgeschreven.

In weerwil van het nu aangewezen verband tusschen de vergelijkingen der onderwerpelijke lemniscata en die van Bernouilli, is de eerste toch geen vorm van de laatste. Want de vergelijking dezer laatste kan nimmer overgaan in de vergelijking (37), vermits de coëfficient, welke steeds genoemd is b^2, de bepaalde waarde van *één* voor de lemniscata van Bernouilli moet hebben, en dus nimmer gelijk *nul* kan aangenomen worden. De onderwerpelijke lemniscata is eerder een vorm eener andere, uit de snijding van een' bol en kegel ontstaande, zoo als in § II dezer bijdrage zal aangetoond worden.

worden, wijl deze, voor het geval van $b^2=0$, eerst nog eene wijziging of eenvoudige herleiding zou moeten ondergaan, daarin bestaande, dat men, alvorens $b^2=0$ te stellen, voor $\frac{\beta^2}{b}$ schrijve q, daarna $q=p$, en alsdan $b=0$ in die termen, welke b nog inhouden. Hierdoor vindt men voor den inhoud der geheele lemniscatische ruimte $\frac{4}{3}p^2$, en dus $\frac{1}{3}$ grooter dan de ruimte, ingesloten door de lemniscata van Bernouilli, zoo deze dezelfde lengte van as heeft; en deze uitkomst was vroeger reeds bekend.

Door de rectificatie-formule (9) verkrijgt men:

$$\partial s = \frac{2p\,\partial\varphi}{(1+cos.2\varphi)^2}\sqrt{\left\{\frac{cos.^2 2\varphi\,(1+cos.2\varphi)^2+sin.^2 2\varphi\,(1-cos.2\varphi)^2}{cos.2\varphi}\right\}}$$

$$=\frac{2p\,\partial\varphi}{1+cos.2\varphi}\sqrt{\left\{\frac{cos.^2 2\varphi+sin.^2 2\varphi\,tang.^4\varphi}{cos.2\varphi}\right\}}$$

$$=\frac{p\,\partial\varphi}{cos.^2\varphi}\sqrt{\left\{\frac{1-3\,tang.^2\varphi+4\,tang.^4\varphi}{1-tang.^2\varphi}\right\}}\;.$$

Om deze formule tot elliptische integralen te brengen, stelle men $tang.\varphi = sin.\psi$, waardoor zij zal overgaan in

$$\partial s = \frac{p\,\partial\psi\,\{1-3\,sin.^2\psi+4\,sin.^4\psi\}}{\sqrt{\{1-3\,sin.^2\psi+4\,sin.^4\psi\}}}$$

$$=\frac{p\,.\,\partial\,.\,tang.\psi}{(1+tang.^2\psi)^2}\cdot\frac{1-tang.^2\psi+2\,tang.^4\psi}{\sqrt{\{1-tang.^2\psi+2\,tang.^4\psi\}}}\;.$$

Hierin nu wederom $2\,tang.^4\psi = tang.^4\frac{1}{2}\omega$, zoo komt men tot

$$\partial s = \frac{\frac{1}{4}p\sqrt[4]{8}\,.\,\partial\omega}{\{1-(1-\frac{1}{2}\sqrt{2})\,sin.^2\frac{1}{2}\omega\}^2}\cdot\frac{1-\frac{1}{4}(2+\frac{1}{2}\sqrt{2})\,sin.^2\omega}{\sqrt{\{1-\frac{1}{4}(2+\frac{1}{2}\sqrt{2})\,sin.^2\omega\}}}\;.$$

Substituerende $sin.^2\frac{1}{2}\omega = \frac{1}{2}.\,(1-cos.\omega)$, vermenigvuldigende teller en noemer van het gebroken met $\{(1+\frac{1}{2}\sqrt{2})-(1-\frac{1}{2}\sqrt{2})\,cos.\omega\}^2$, en herleidende daarna behoorlijk, zoo ontstaat eindelijk:

∂s

$$\partial s = \tfrac{1}{8} p \sqrt[4]{8} \; . \; \frac{\partial\omega \left\{3 - cos.\,\omega - m\,.\,sin.^2\,\omega\right\} \left\{1 - c^2\, sin.^2\omega\right\}}{(1 + n\, sin.^2\,\omega)^2 \, \sqrt{(1 - c^2 sin.^2\,\omega)}} \;,$$

in welke, tot meerdere eenvoudigheid, gesteld is,

$$\tfrac{3}{2} - \sqrt{2} = m \;,$$
$$\tfrac{3}{8}\sqrt{2} - \tfrac{1}{2} = n \;,$$
$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{8}\sqrt{2} = c^2 \,.$$

De verdere behandeling dezer formule, volgens regels, daartoe uit de theorie der elliptische functieën bekend, hangt van eene zeer wijdloopige berekening af, van welke het genoeg moge zijn, hier de niet zeer eenvoudige uitkomst te vermelden, te weten:

$$s = (\tfrac{1}{8} p \sqrt[4]{8}) \left\{ \left[\frac{mc^2}{n^2} - \frac{(3n+m)\,(n+c^2)}{2n^2\,(1+n)}\right] \mathrm{F} + \frac{3n+m}{2n\,(1+n)}\, \mathrm{E} + \right.$$
$$\left. + \left[\frac{(3n+m)\;\{n\,(2+n) + (3+2n)\,c^2\}}{2n^2\,(1+n)} - \frac{m+3\,c^2}{n} - \frac{2\,mc^2}{n^2}\right] . \,\Pi \right\} +$$
$$+ (\tfrac{1}{8} p \sqrt[4]{8}) \left\{ \frac{3n+m}{2(1+n)} \cdot \frac{sin.\omega.cos.\omega\, \sqrt{(1-c^2 sin.^2\omega)}}{1+n\, sin.^2\,\omega} - \tfrac{1}{2} \cdot \frac{sin.\omega\, \sqrt{(1-c^2 sin.\omega)}}{1+n.\, sin.^2\,\omega} \right.$$
$$+ \frac{n+2\,c^2}{4n\sqrt{(n+c^2)}} . \,Boog\, tang. \left[= \frac{1-(n+2c^2\, sin.^2\,\omega)}{2(n+c^2)^{\frac{1}{2}}.\, sin.\,\omega \sqrt{(1-c^2\, sin.^2\,\omega)}}\right]$$
$$\left. + \frac{c^2}{n\sqrt{(n+c^2)}}\; Boog\, tang. \left[= \frac{sin.\,\omega \sqrt{(n+c^2)}}{\sqrt{(1-c^2\, sin.^2\,\omega)}}\right] \right\} \;\ldots\ldots\; (39)$$

Daar $tang.\,\varphi = sin.\,\psi$, en $tang.\,\psi = (\sqrt[4]{\tfrac{1}{2}})\; tang.\,\tfrac{1}{2}\,\omega$ is, zoo wordt

$$tang.\,\varphi = \frac{sin.\,\tfrac{1}{2}\,\omega}{\sqrt{\{\,1 - (1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{2})\; sin.^2 \tfrac{1}{2}\omega\}}} \;.\; \sqrt[4]{\tfrac{1}{2}} \;.$$

De grenzen van φ zijn 45° en *nul;* derhalve moeten, met $\varphi = 0$ en $\varphi = 45°$, overeenstemmen $\omega = 0$ en $\omega = 180°$. Hieruit vloeit voort, dat, om de lengte van een der lemniscatische quadranten te bepalen, de formule (39) moet worden genomen tusschen de grenzen 180° en 0°. Ten

aan-

aanzien van de termen, die met eenige elliptische functie worden gemultipliceerd, komt dit neder op het verdubbelen van dezelve, en op het vermenigvuldigen met de complete functieën. En wat betreft de volkomen geintegreerde termen, deze hebben, voor beide de grenzen, dezelfde waardijen, en vervallen alzoo uit de integraal. Ergo zal de formule voor de lengte van het lemniscatisch quadrant den vorm hebben van :

$$S = (\tfrac{1}{4} p \sqrt[4]{8}) \{A . F'(c) + B . E'(c) + C . \Pi'(n, c)\} \quad . \; . \; . \; . \quad (40)$$

De parameter n is hier kleiner dan één, maar positief; denzelven $=$ $cot.^2\,\theta$ stellende, zoo wordt de complete functie Π afhankelijk gemaakt van E en F, door middel van de formule

$$\Pi'(n,c) = \frac{sin.\theta . cos.\theta}{\Delta(b,\theta)} \left\{ \tfrac{1}{2}\pi + tang.\theta . \Delta(b,\theta) F'(c) + [F'(c) - E'(c)] F(b,\theta) - F'(c) E(b,\theta) \right\}$$

(zie LEGENDRE, *Traité* etc. I, pag. 134), in welke $b = \sqrt{(1 - c^2)}$ is. De substitutie hiervan en de verdere ontwikkeling worden nagelaten, aangezien de coëfficienten van F en E, zelfs bij overbrenging der volstrekte getallenwaarden van n, m, c, b, zeer zamengestelde uitdrukkingen worden. De vorm der einduitkomst verschilt evenwel zeer weinig van dien der formule (23).

Stelde men, even als SERRET voor de gewone lemniscata deed, meer algemeen :

$$r^m = (2p)^m \frac{cos. m\varphi}{(1 + cos. m\varphi)^m} \; ,$$

dan zou men, voor het geval van $m = 1$, verkrijgen

$$r = (2p - r)\, cos. \varphi \; .$$

Bij de gewone lemniscata zou deze vergelijking zijn $r = p\, cos. \varphi$, en behooren tot een' cirkel, hebbende p tot middellijn. Hier is de verkregene vergelijking striktelijk wel die eener lijn van den vierden graad, maar zij heeft den vorm van de vergelijking eens cirkels, en er bestaat dus eenige

over-

overeenkomst tusschen de bijzondere gevallen van $m = 1$, zoo voor de gestelde vergelijking, als voor die, welke uit de vergelijking der lemniscata van Bernouilli wordt afgeleid. Bij deze laatste heeft de cirkel eene standvastige middellijn; bij de eerste is de middellijn veranderlijk met den voerstraal. Men kan de kromme lijn dan ook gemakkelijk met den cirkel, die $2p$ tot straal heeft, en met een anderen, die, r willekeurig nemende, $2p - r$ tot middellijn heeft, construeren. Ook indien men eene parabola construeert, hebbende p tot brandpunts-afstand, en dat men op de voerstralen, uit het brandpunt getrokken, deelen neemt, die aan de projectieën dezer voerstralen op de as gelijk zijn, zullen de uiteinden dezer deelen punten van de kromme lijn wezen, hetgeen dadelijk blijkt uit de pool-aequatie

$$r = \frac{2p \, . \, cos. \, \varphi}{1 + cos. \, \varphi} = \frac{2p}{1 + cos. \, \varphi} \, . \, cos. \, \varphi \, .$$

Hoe eenvoudig ook de vergelijking dezer kromme lijn moge schijnen, zoo hangt hare rectificatie van eene zamenstelling van elliptische integralen af, veel meer ingewikkeld zijnde dan de formule, zoo even, in de onmiddelijk voorgaande beschouwing verkregen.

Neemt men $p = 1$, zoo heeft de hyperbolische lijn, welke de omgekeerde kromme der overwogene lemniscata is, tot pool-aequatie

$$\rho^2 = \tfrac{1}{4} \left\{ \frac{1}{cos. \, 2\varphi} + 2 + cos. \, 2\varphi \right\} ;$$

ergo is het quadraat van haren voerstraal gelijk aan $\frac{1}{4}$ van de som der quadraten, beschreven op de overeenkomstige voerstralen eener gewone lemniscata en der overeenstemmende gelijkzijdige hyperbola, en op de koorde van het quadrant eens cirkels, hebbende de halve as der lemniscata en der hyperbola tot straal; — indien de parameter niet $= 1$ ware, zou hetzelfde klaarblijkelijk nog plaats vinden ten aanzien van het p-voud des voerstraals. Dit is het eenige belangrijke, dat van de hyperbolische lijn, die als grondlijn van de beschouwde lemniscata kan aangemerkt worden, vermelding ver-

verdient. Een verder voortgezet onderzoek, voornamelijk met oogmerk om uit te vorschen, of er merkwaardige betrekking tusschen overeenstemmende bogen dezer kromme lijnen bestaat, heeft niets bijzonders opgeleverd.

D. De behandelde gevallen zijn de voornaamste, in welke, door bijzondere betrekkingen tusschen de coëfficienten $a^2, b^2, \alpha^6, \beta^6$, het onderzoek der rectificatie tot eenige wetenswaardige uitkomst voert. Men kan evenwel nog andere betrekkingen tusschen die coëfficienten stellen, door welke de vergelijking (1), (3) of (4) tot lemniscaten behoort, welker wording opmerking verdient. Neemt men b. v. aan, dat, in de vergelijkingen (3) of (4), de coëfficienten van $sin.^2 \varphi$ of $cos. 2\varphi$ gelijk zijn, dat is: stelt men $(\alpha^6 - \beta^6) = (a^2 - b^2)$, of $\alpha^6, \beta^6, a^2, b^2$ in rekenkundige evenredigheid, zoo behoort de vergelijking tot eene lemniscata, welke is de orthogonale projectie der sphaerische lemniscata. Even zoo als de gewone lemniscata de eigenschap heeft, dat het product der overeenkomstige voerstralen, uit de beide brandpunten getrokken, gelijk is aan de tweede magt der excentriciteit, kan men zich ook voorstellen op de sphaer twee punten en de lemniscatische lijn, welke de eigenschap heeft, dat het product der *sinussen* of der *tangenten* van de geheele of der halve sphaerische voerstralen, uit genoemde punten tot eenig punt der kromme getrokken, standvastig gelijk zij aan de tweede magt der *sinus* of *tangens* van den halven sphaerischen afstand of van het $\frac{1}{4}$ des afstands dier punten. Nemende de *sinussen* der halve sphaerische voerstralen, noemende vervolgens den sphaerischen afstand der beide punten 2ε, den sphaerischen centralen voerstraal ρ, en φ den sphaerischen hoek, begrepen tusschen den voerstraal ρ en de sphaerische lijn, welke door pasgenoemde sphaerische brandpunten gaat, zoo komt men, uit de sphaerische driehoeken, welke ρ, ε, en de brandpuntsvoerstralen tot zijden hebben, tot de betrekking

$$cos. \varepsilon = cos.^2 \tfrac{1}{2}\rho \, (1 - sin.^2 \varepsilon \, . \, sin.^2 \varphi),$$

of

cos.

$$cos.^2 \tfrac{1}{2}\rho = \frac{cos.\varepsilon}{1 - sin.^2\varepsilon . sin.^2\varphi}.$$

Deze is de vergelijking der sphaerische lemniscata, door ROBERTS opgegeven in een artikel, voorkomende in Deel VIII, pag. 263, van het *Journal de mathématiques, par* LIOUVILLE, en uit welke vergelijking, door dezen wiskundige, de rectificatie der sphaerische lemniscata is opgemaakt. De lengte der bogen van deze niet vlakke kromme lijn hangt af van eene elliptische functie der eerste soort, hebbende een' modulus, van welken de hoek tusschen 0 en 45° kan veranderen, terwijl, bij de vlakke lemniscata, de modulus standvastig is (4).

De orthogonale projectie der sphaerische lemniscata op het vlak van een' grooten cirkel, loodregt staande op de middellijn, welke men door den knoop der sphaerische kromme lijn getrokken kan denken, is eene vlakke lemniscata, van welke de centrale poolvergelijking zeer gemakkelijk uit de bovengestelde aequatie wordt afgeleid. Want de hoek φ blijft in de projectie onveranderd; de projectie van den boog ρ wordt eene regte lijn r, zoodat $r = sin.\rho$ is; eveneens wordt de projectie van den boog ε eene lijn c, die $= sin.\varepsilon$ is, en hiermede wordt de vergelijking der projectie van de sphaerische lemniscata

$$r^2 = \frac{4\sqrt{(1-c^2)}}{1 - c^2\, sin.^2\varphi} - \frac{4\,(1-c^2)}{(1 - c^2\, sin.^2\varphi)^2}.$$

Stelt

(4) Voor het oogmerk des onderzoeks van ROBERTS is de vorm der vergelijking van de sphaerische lemniscata zeer geschikt. Wilde men den vorm meer overeenkomstig met dien der poolvergelijking van de vlakke lemniscata stellen, dan zou men, door b. v. $cos.^2 \tfrac{1}{2}\rho$ tot $tang.^2 \tfrac{1}{2}\rho$ te herleiden, hebben

$$tang.^2 \tfrac{1}{2}\rho = \frac{(1 - cos.\,\varepsilon)^2 + sin.^2\varepsilon\,.\,cos.\,2\varphi}{2\,cos.\,\varepsilon};$$

want bij den overgang van het sphaerisch vlak, tot het platte vlak gaat deze vergelijking ook over in de gewone poolvergelijking der lemniscata van BERNOUILLI.

Stelt men $\sqrt{(1-c^2)} = q$, zoo kan men deze vergelijking schrijven onder den vorm

$$r^2 = 4q.\frac{(1-q)-c^2 sin.^2\varphi}{(1-c^2 sin.^2\varphi)^2} \dots\dots\dots\dots (41)$$

overeenkomende met of begrepen in den algemeenen vorm (3) der pool-vergelijking van de lemniscatische kromme lijnen der eerste orde.

Deze lemniscata kan nimmer eene bernouilliaansche worden, wijl de hoek, tusschen de as en de centrale tangenten, altijd boven 45° blijft, zijnde het maximum der waarde van dien hoek bepaald door de betrekking

$$sin.\varphi = \frac{\sqrt{(1-q)}}{c};$$

daar nu de straal van den bol $= 1$ is, zal c steeds kleiner dan 1 moeten wezen (5), en voor elke waarde van c, tusschen 0 en 1, zal de waarde van $sin.^2\varphi$ altijd $> \frac{1}{2}$, en dus $\varphi > 45°$ worden; $c = 0$ kan alleenlijk *sin.*

(5) Dit wordt hier kortheidshalve in het algemeen gezegd; doch de eigenlijke grootste grens voor de waarde van c is niet alleenlijk kleiner dan één, maar kleiner dan $\frac{1}{2}\sqrt{3}$. Bij de beschouwing der projectie van de sphaerische lemniscata wordt namelijk voorondersteld, dat deze kromme lijn zich niet uitstrekke tot in de hemisphaer, beneden het projectie-vlak gelegen. Is $c^2 = \frac{3}{4}$, en $q^2 = \frac{1}{4}$ of $q = \frac{1}{2}$, dan is de grootste sphaerische voerstraal ρ juist $=$ een quadrant, en de projectie van dezen voerstraal moet dus aan den straal 1 des bols gelijk wezen; hetgeen ook blijkt uit de formule (41) als men $\varphi = 0$ en $q = \frac{1}{2}$ stelt. Hoezeer dan, op den bol, $sin.\varepsilon$ alle waarden kan hebben van *nul* tot *één*, moet men, om geene projectie te verkrijgen, welke van de lemniscatische figuur afwijkt, de waarde van $c = sin.\varepsilon$ kleiner dan $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ stellen. Voor grootere waarden van q, boven $\frac{1}{2}$, zou het ook kunnen gebeuren, dat de formule (43) eene negatieve uitkomst voor den inhoud opleverde, hetgeen inderdaad zeer wel kan plaats vinden, als de sphaerische lemniscata tot in de onderste helft van het oppervlak des bols (en dus beneden het vlak van projectie) is uitgestrekt, en diensvolgens eene projectie heeft, bestaande uit deelen, welke aan beide zijden van het vlak van projectie zijn genomen; want de inhoud van het eene deel moet daardoor, ten opzigte van dien des anderen deels, als negatief aangemerkt worden bij het integreren.

$sin.^2\ \varphi = \frac{1}{2}$ opleveren. Nog duidelijker blijkt dit, indien men $tang.\varphi$ bepaalt uit $sin.\ \varphi$; want voor $tang.\varphi$ komt alsdan de waarde $\frac{1}{q}$, en q bestendiglijk < 1 zijnde, zal φ altijd $> 45°$ wezen.

Zij $\mathrm{r} = \frac{r}{2\sqrt{q}}$, zoo komt uit (41), overeenkomstig den vorm der vergelijking (4), vroeger gesteld,

$$\mathrm{r}^2 = 2 \cdot \frac{(1-q)^2 + c^2\ cos.\ 2\ \varphi}{\{(1+q^2) + c^2\ cos.\ 2\ \varphi\}^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (42)$$

Hiermede de toepassing makende op formule (8), verkrijgt men voor den inhoud der lemniscata

$$\mathrm{I} = \frac{(1-q)}{q} \cdot \{4\sqrt{q} - (1-q)\ \pi\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (43)$$

Doch met de herleiding der rectificatie-formule (9) schijnt geen gewenscht resultaat verkregen te kunnen worden, welke bepaalde getallenbetrekkingen men ook voor c^2 , of voor q, mogt aannemen.

Het voorgaande betreft inzonderheid de lemniscaten van de eerste orde. Het onderzoek zou tot lemniscaten van hoogere orde kunnen uitgestrekt worden; dan ik eindig hier deze beschouwingen met alleenlijk nog te vermelden, dat men, behalve lemniscaten van verschillende orde, maar hebbende algebraïsche of zuiver goniometrische aequatieën, ook nog onderscheiden kan lemniscaten, die eene transcendentale vergelijking hebben. Zoo b. v. φ is eene cirkelvormige abscis, z eene polaire of divergerende ordinaat, loodregt door de cirkelvormige abscis gerigt, en α de grootste waarde van φ, voor welke z eene bestaanbare waarde kan erlangen, zal de kromme lijn, welker vergelijking is

$$z^2 = a^2\ (\alpha^2 - \varphi^2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (44)$$

(eigenlijk tot de klasse van elliptische spiralen behoorende), geacht kunnen

 wor-

worden te zijn eene transcendentale lemniscata. Haar vorm is zuiver lemniscatisch, en hare rectificatie wordt gemakkelijk van eene elliptische integraal afhankelijk gemaakt. EULER maakt van den vorm dezer kromme lijn ter loops gewag in zijne *Introductio in analysin infinitorum*, Vol. II, Cap. XXI, pag. 302.

---

§ II.

Na deze beschouwingen, tot welke de vergelijking (3) of (4) aanleiding gaf, moet nu gehandeld worden over andere wijzen van wording der lemniscaten, onderscheiden van de vroeger aangeduide, gelijk mede eenige voorbeelden moeten worden bijgebragt van bepaalde gevallen, in welke lemniscatische kromme lijnen kunnen ontstaan; alleenlijk zal het hoofdzakelijke hieromtrent worden aangestipt.

a. Indien de generatie van lemniscaten, als omgekeerde van hyperbolische kromme lijnen, boven is voorgesteld als eene algemeene wording, zoo is zij nogtans de eenige niet; want zonder dezelve als omgekeerde kromme lijnen aan te merken, kunnen zij ook nog op onderscheidene andere wijzen uit gegevene kromme lijnen geboren worden. Reeds is van eene andere constructie van lemniscaten uit hyperbolen gewaagd, want de voetpunten der loodlijnen, uit het centrum eener hyperbolische kromme op hare opvolgende raaklijnen nedergelaten, moeten noodwendig in een' lemniscatischen omtrek zijn gelegen. De lemniscaten zijn dus niet alleenlijk omgekeerde van hyperbolische kromme lijnen, maar ook zoogenaamde voetpunten-kromme lijnen der hyperbolen van verschillende orden. En niet slechts uit opene kromme lijnen, gelijk de hyperbolen zijn, ook uit geslote-

tene kromme lijnen, zoo als uit ellipsen, cirkels, ovalen, enz. kunnen de lemniscaten op meer dan ééne wijze voortkomen. Eindelijk, daar elke kromme lijn kan gedacht worden te zijn de meetkundige plaats der doorsnijdings-punten van andere lijnen (hetzij regte, hetzij kromme, hetzij regte en kromme lijnen), aan eene bepaalde wet van beweging of verandering onderworpen, zoo kan ook een dergelijke oorsprong aan de lemniscaten toegekend worden.

Men denke b.v. eene ellips. Eene middellijn getrokken, en ergens op het verlengde dezer middellijn een punt O genomen hebbende, zoo trekke men, door dit punt, een bundel van stralen, genoegzaam verlengd om door den omtrek der ellips gesneden te worden. Op elken straal bestaat aldus eene koorde der ellips; men brenge nu, te rekenen van het punt O, en aan wederzijden van hetzelve, op elken straal de lengte der overeenkomstige koorde over, zoo maken de uiteinden dezer stralen van bepaalde lengte eene meetkundige plaats uit, en deze is eene lemniscata, van welke het punt O de knoop is. Zij is wel symmetrisch, maar niet ten opzigte van de bovengenoemde middellijn, zoo deze is eene willekeurige, en niet de grootste of de kleinste middellijn. Het is zeer gemakkelijk, de vergelijking dezer lemniscata op te maken. Is b.v. de gekozene middellijn de groote as der ellips, zoo is haar verlengde de as der lemniscata. Nemende nu het punt O als oorsprong van regthoekige coördinaten, stellende wijders de halve assen der ellips a en b, en d den afstand der middelpunten van de ellips en der lemniscata, zoo vindt men voor de middelpunts-vergelijking der lemniscata

$$(b^2x^2 + a^2y^2)^2 = 4\,a^2\,b^2\,\{(b^2x^2 + a^2y^2) - d^2y^2\} \quad . \; . \; . \quad (45)$$

welke, vermits $d > a$, en dus $(a^2 - d^2)\,y^2$ eigenlijk is $-\,(d^2 - a^2)\,y^2$, ook behoort tot de vergelijkingen, begrepen in de algemeene vroeger gestelde vergelijkingen (1) en (2).

Voor een cirkel is $b = a$, en dus

$$(x^2 + y^2)^2 = 4\,\{a^2\,(x^2 + y^2) - d^2\,y^2\},$$

 en

en deze gaat over in de vergelijking der lemniscata van BERNOUILLI, wanneer $d^2 = 2a^2$ wordt, en in de daad maken alsdan — doch ook in geen ander geval — de raaklijnen, uit O tot den cirkel getrokken, een' regten hoek met elkander.

Dezelfde constructie op andere geslotene kromme lijnen herhalende, komen er insgelijks lemniscaten, die echter van hoogere orde zullen wezen, en enkel of dubbel kunnen zijn. Neemt men b. v. op de dwarsche as eener gewone lemniscata, of van elke andere lemniscata der eerste orde, een punt, en herhaalt men de opgegevene constructie op beide de strikken der lemniscata, zoo ontstaat er eene dubbele lemniscata van de derde orde, dat is eene lemniscata, hebbende *vier* symmetrisch gelegen strikken, en eene orthogonale coördinaten-vergelijking van den achtsten graad.

De verklaarde wording is geenszins nieuw. Voor den cirkel is de wording der lemniscata van BERNOUILLI opgegeven door CHASLES in een der deelen van de *comptes rendus de l'Académie des sciences* van het fransche Instituut (zie ook het *Journal de mathématiques, publié* par LIOUVILLE, Tome X, page 451). Doch het meer algemeene voorstel, om de constructie op eene ellips toe te passen, treft men aan in een, zoo ik vermeen reeds vroeger uitgegeven, nederduitsch geschrift. Ik heb namelijk de verklaarde wording der lemniscaten ontleend van eene beschouwing, en uit een voorgesteld en opgelost problema, voorkomende in het 2e stuk des eersten deels (pag. 44) der *Nieuwe wis- en natuurkundige verhandelingen of voorstellen* van het amsterdamsch genootschap, onder de zinspreuk: *een onvermoeide arbeid komt alles te boven.* Aldaar wordt evenwel minder acht gegeven op die kromme lijnen als lemniscaten, en hetgeen van hare rectificatie wordt gezegd, als wel tot ingewikkelde berekeningen voerende, maar tot geene merkwaardige uitkomsten, is, naar aanleiding der voorgaande beschouwingen, verre af van zoo beslissend te zijn.

---

b. Om de bijzondere soorten van lemniscaten der eerste orde te kunnen construeren, indien men dezelve als omgekeerde kromme lijnen beschouwt, moet men de bijzondere soorten van hyperbolen kennen, uit welke zij, door omkeering van de getallen-waarden der voerstralen, ontstaan. Doch men kan ook eene geheel eigenaardige wording aan de lemniscaten toeschrijven, door ze aan te merken als kromme lijnen, welker punten verkregen worden bij de snijding van gewone hyperbolen met ellipsen, of ook met cirkels, welker parameters, voor elke nieuwe groep van punten, op eene regelmatige wijze veranderen, en wel met tusschenkomst eener parabola; zoodat, op deze wijze, de lemniscaten uit de gewone kegelsneden haren oorsprong ontleenen.

Men schrijve de vroeger beschouwde algemeene vergelijking (2) der lemniscaten van de eerste orde onder dezen vorm:

$$(b^2x^2 + a^2y^2)^2 = c^4\,(\beta^2x^2 - \alpha^2y^2) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\zeta)$$

alsdan moet aangetoond worden, dat deze vergelijking kan ontstaan uit de eliminatie der veranderlijke parameters, voorkomende in de vergelijkingen van eene hyperbola en eener ellips, welke elkander snijden, en telkens van afmeting veranderen. De wet van verandering dezer afmetingen zou verschillend kunnen wezen, doch om de mogelijkheid of het eigenaardige dezer niet onbelangrijke wording der lemniscaten aan te toonen, strekke alleenlijk het navolgende.

Men denke eene hyperbola, hebbende eene halve eerste as $= p$, terwijl de betrekking of verhouding tusschen de tweede en eerste as zij $= (\beta : \alpha)$. De vergelijking van deze hyperbola zal zijn

$$\beta^2 x^2{}_1 - \alpha^2 y^2{}_1 = p^2 \beta^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\varkappa)$$

Indien men, in deze vergelijking, p willekeurig laat veranderen, zal zij de vergelijkingen opleveren van alle gelijkvormige hyperbolen, welker

asymp-

asymptoten met de eerste assen denzelfden hoek insluiten, wiens goniometrische tangens is $=\frac{\beta}{\alpha}$.

Zij ook eene ellips, hebbende eene halve grootste en halve kleinste middellijn, welker verhouding is $\frac{a}{b}$. En nog denke men eene parabola, hebbende een parameter $=\beta\,.\,\frac{c^2}{ab}$, zijnde c eenige gegevene lijn. Is nu p eenige abscis van die parabola, welker top in den oorsprong der coördinaten ligt, en de voorname as langs de abscissen-as, zoo wordt het vierkant of de tweede magt der overeenkomstige halve ordinaat uitgedrukt door:

$$\beta\,.\,\frac{c^2}{a\,b}\,.\,p\,.$$

Men neme eindelijk aan, dat de regthoek onder de halve assen der genoemde ellips gelijk zij aan dit vierkant; indien dan m en n de volstrekte lengten der halve assen van de ellips zijn, zal

$$\frac{m}{n}=\frac{a}{b}\,,\ \text{en}\ m\,.\,n=\beta.\frac{c^2}{a\,b}\,.\,p$$

wezen. Hierdoor zal de vergelijking der ellips zijn

$$\beta\,.\,\frac{c^2p}{a^2}\,x^2{}_2+\beta\,.\,\frac{c^2p}{b^2}\,y^2{}_2=\beta\,.\,\frac{c^2p}{a^2}\,.\,\beta\,.\,\frac{c^2p}{b^2}\,,$$

dat is:

$$b^2x^2{}_2+a^2y^2{}_2=\beta p\,.\,c^2\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (\lambda)$$

Wanneer men derhalve aan p verschillende waarden geeft, van *nul* af tot zekere straks aan te wijzen grens, zal men telkens eene hyperbola ($\varkappa$) van andere afmeting hebben; met deze zal ook telkens een andere ellips (λ) overeenstemmen. Deze ellips en hyperbola concentrisch geconstrueerd zijnde, zullende elkander in *vier* punten snijden, en de opvolging der vierparen van punten zal eene kromme lijn doen ontstaan, welker ver-

vergelijking, onafhankelijk moetende zijn van elke waarde van p, klaarblijkelijk gevonden wordt door 1°. de coördinaten x_1, y_1 en x_2, y_2, welke in de vergelijkingen ($\varkappa$) en (λ) voorkomen, gelijk te stellen aan de loopende coördinaten x en y van de begeerde kromme lijn; 2°. door alsdan den veranderlijken parameter p uit de genoemde vergelijkingen te elimineren. Zulks doende, komt er

$$(b^2 x^2 + a^2 y^2)^2 = c^4 (\beta^2 x^2 - \alpha^2 y^2) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (46)$$

Hierdoor is dan betoogd eene wijze, waarop de vergelijking (ζ) kan voortkomen, en tevens eene wijze van ontstaan of van wording eener kromme lijn of eener soort van kromme lijnen, hebbende de vergelijking (ζ) tot algemeene aequatie. Dat deze kromme lijnen lemniscaten zullen moeten wezen, is ligtelijk in te zien, zoo men de snijding der opvolgende ellipsen en hyperbolen overweegt, en over de verandering van derzelver grootte, bij de trapswijze vermeerdering van p, een weinig nadenkt. — Tot zekere grens heeft men met elk paar ellipsen en hyperbolen steeds vier snijpunten; bij die grens evenwel slechts twee raakpunten, en voorbij die grens houdt de snijding op, ten blijke, dat de kromme begrensd en gesloten is. Die grens nu is $p = \frac{\beta}{b^2} c^2$; want met deze waarde van p zullen de vergelijkingen der hyperbola en ellips wezen

$$\beta^2 x^2{}_1 - \alpha^2 y^2{}_1 = \frac{\beta^4 c^4}{b^4},$$

$$b^2 x^2{}_2 + a^2 y^2{}_2 = \frac{\beta^2 c^4}{b^2}.$$

Zoowel de ellips als de hyperbola zal derhalve tot eerste as of halve eerste as hebben eene lijn $= \beta \cdot \frac{c^2}{b^2}$. Ergo kunnen deze kromme lijnen elkander niet snijden, maar raken elkander in de gemeenschappelijke toppen der eerste assen.

Neemt men voor p eene grootere waarde, b. v.

$$p = \beta . \frac{c^2}{b^2} + \delta ,$$

zoo heeft men eene hyperbola, welker halve eerste as is p, en de uitdrukking der waarde van de halve eerste as der overeenkomstige ellips zal wezen:

$$= \sqrt{\left\{\beta \frac{c^2}{b^2} + \delta\right\} . \beta . \frac{c^2}{b^2}} ,$$

en dus kleiner dan $\beta \frac{c^2}{b^2} + \delta$; ergo is, voorbij genoemde grens, de snijding der ellipsen en hyperbolen onmogelijk.

Deze constructie van lemniscaten, door gelijkvormige ellipsen en hyperbolen, leert ook deze waarheid, welke vroeger, in § I, reeds door voorbeelden bleek: dat vele lemniscaten zeer onderscheiden kunnen zijn in vorm en afmeting, en nogtans nabij den knoop hetzelfde beloop hebben. Want alle lemniscaten, begrepen in de gevondene aequatie, zullen, zoo lang $\frac{\beta}{\alpha}$ dezelfde waarde heeft, ook dezelfde raaklijnen in den knoop, en dus aldaar hetzelfde beloop hebben, terwijl overigens vorm en afmeting van a, b, c afhangen, aan welke men, in elke volledige constructie, telkens eene andere waarde zal kunnen geven.

Voor de gewone lemniscata wordt de constructie eenvoudiger. Stelt men namelijk $a = b$, $\alpha = \beta$, zoo is

$$(x^2 + y^2)^2 = \frac{c^4}{a^4} (x^2 - y^2) ,$$

waarvoor, vermits $(c^4 : a^4)$ eene verhouding is, kan geschreven worden

$$(x^2 + y^2)^2 = d^2 (x^2 - y^2) ,$$

en de constructie komt alsdan hierop neder.

Construeer, met eene willekeurige halve as p, eene gelijkzijdige hyperbola

$$x^2{}_1 - y^2{}_1 = p^2 .$$

Con-

Construeer eene parabola, hebbende eene gegevene lijn d tot parameter. Neem van deze parabola de ordinaat, hebbende p tot abscis, en beschrijf met dezelve, als radius, uit het centrum der gelijkzijdige hyperbola, een cirkel; deze snijdt de hyperbola, in het algemeen, in *vier* punten, welke zullen zijn punten der lemniscata van BERNOUILLI. Want de radius van den cirkel is $\sqrt{dp}$, en daarom de vergelijking van den cirkel

$$x^2{}_2 + y^2{}_2 = dp \, .$$

Stellende nu in deze, en in de voorgaande vergelijking, $x_1 = x_2 = x$ en $y_1 = y_2 = y$, en eliminerende p, zoo komt juist de aequatie der bernouillaansche lemniscata.

De overweging van bijzondere gevallen, overeenkomstig particuliere waarden van a, b, c, en zelfs overeenkomstig de teekens, die zij zouden kunnen hebben, geeft stof tot uitbreiding dezer beschouwing; doch het ligt buiten mijn oogmerk, hierover meer uit te weiden.

---

c. Door het betoogde sub a en b wordt aangeduid de wording van lemniscaten uit of door middel van kromme lijnen. Thans zal worden aangewezen, hoe de lemniscatische kromme lijnen uit de snijding van gebogene oppervlakken kunnen voortkomen, en wel, in de eerste plaats, hoe de lemniscaten kunnen beschouwd worden te zijn de projectieën der doorsnijding van gebogene oppervlakken. Bij voorkeur, en om de reeks van beschouwingen niet te zeer te verlengen, zal hier tot voorbeeld genomen worden de snijding van oppervlakken des tweeden graads. Oppervlakken van hoogeren graad kunnen nogtans evenzeer lemniscatische snijdingen geven; zonder van de snijdingen met platte vlakken te spreken, heeft men b.v. ook lemniscatische projectieën uit de snijding van eenig oppervlak des tweeden graads met een' kegel des vierden of eens hoogeren graads, hebbende eene lemniscata van de eerste, of van eene hoogere orde, tot rigtlijn.

Zij een kegel van den tweeden graad, en, meer bepaaldelijk, een elliptische kegel. Men neme den oorsprong der regtlijnige coördinaten in het middelpunt; de abscissen-as langs de voorname ware as der kegelvlakte, en de beide andere coördinaten-assen langs de beide andere hoofdassen, zoo is de vergelijking van het oppervlak:

$$b^2 c^2 x^2{}_1 - a^2 c^2 y^2{}_1 - a^2 b^2 z^2{}_1 = 0 ,$$

of

$$\alpha^2 x^2{}_1 - \beta^2 y^2{}_1 - \gamma^2 z^2{}_1 = 0 \text{ . . . . } (\mu)$$

zijnde a , b , c zoodanige getallenwaarden van lijnen, dat, als men op de as van x, en gerekend van den oorsprong, een deel neemt $= a$, en den kegel snijdt met een plat vlak, gaande loodregt door de as van x en door het uiteinde van het deel a, de ellips, uit die doorsnijding ontstaan, tot voorname of grootste en kleinste middellijnen hebbe lijnen, welker getallenwaarden zijn b en c.

Men denke ook eene ellipsoïde, hebbende p , q , r tot halve voorname assen, p de grootste, r de kleinste. Het centrum dezer ellipsoïde zij gelegen op de as van z, op een' afstand d van den oorsprong; de as $2p$ loope evenwijdig aan de as van x, dat is evenwijdig aan de ware as des kegels. De vergelijking dezer ellipsoïde zal alzoo wezen:

$$q^2 r^2 x^2{}_2 + p^2 r^2 y^2{}_2 + p^2 q^2 (z_2 - d)^2 = p^2 q^2 r^2 \text{ . . . } (\nu)$$

Is nu de ellipsoïde zoo geplaatst, dat zij den kegel kunne snijden — en waartoe de betrekking, die er tusschen a , c , p , r en d moet bestaan, gemakkelijk gevonden wordt — alsdan verkrijgt men de vergelijking der projectie van de kromme lijn, volgens welke de oppervlakken elkander doorsnijden, op het vlak $x y$, als projectie-vlak beschouwd, door, in de vergelijkingen (μ) en (ν), $x_1 = x_2 = x$ en $y_1 = y_2 = y$ te stellen, en daarna z te elimineren. Deze bewerking zal tot uitkomst geven:

q^2

$$\left\{q^2(\alpha^2p^2+\gamma^2r^2)x^2+p^2(\gamma^2r^2-\beta^2q^2)y^2\right\}^2+p^4q^4\gamma^4(d^2-r^2)^2=$$
$$=2p^2q^2\gamma^2\left\{q^2\left[\alpha^2p^2(d^2+r^2)-\gamma^2r^2(d^2-r^2)\right]x^2-\right.$$
$$\left.-p^2\left[\beta^2q^2(d^2+r^2)+\gamma^2r^2(d^2-r^2)\right]y^2\right\}, \quad \ldots \ldots (47)$$

en deze is de algemeene aequatie der horizontale projectie van de doorsnijdings-kromme der ellipsoïde met den kegel. Zij heeft den algemeenen vorm der vergelijkingen van lemniscatische kromme lijnen der eerste orde. Naar gelang d eene andere waarde heeft, zal de geprojecteerde kromme eene andere figuur hebben, en het is ligtelijk in te zien, dat deze figuur zal behooren tot twee der vormen van de cassinoïde, en óf uit twee afgescheiden ovalen zal bestaan, óf eene lemniscata zal zijn. Dit laatste is alleenlijk het geval, wanneer één der toppen van de as $2r$ der ellipsoïde door het middelpunt des kegels gaat; dus wanneer $d=r$ is, en alsdan wordt de vergelijking (47) die eener eigenlijke lemniscata, namelijk:

$$\left\{q^2(\alpha^2p^2+\gamma^2r^2)x^2+p^2(\gamma^2r^2-\beta^2q^2)y^2\right\}^2=4p^4q^4r^2\gamma^2(\alpha^2x^2-\beta^2y^2)\ (47^*)$$

Voor den regten cirkelvormigen kegel is $\alpha=\beta$, en voor dien, welks beschrijvende lijn een' halven regten hoek maakt met de as, is $\alpha=\beta=\gamma$; ergo

$$\left\{q^2(p^2+r^2)x^2-p^2(q^2-r^2)y^2\right\}^2=4p^4q^4r^2(x^2-y^2)\ \ldots (48)$$

De snijding van een' bol en elliptischen kegel zal, wegens $p=q=r$, geven:

$$\left\{(\alpha^2+\gamma^2)x^2+(\gamma^2-\beta^2)y^2\right\}^2=4r^2\gamma^2(\alpha^2x^2-\beta^2y^2)\ \ldots (49)$$

Is de kegel regt, zoo is $\alpha=\beta$, en

$$\left\{(\alpha^2+\gamma^2)x^2-(\alpha^2-\gamma^2)y^2\right\}^2=4r^2\alpha^2\gamma^2(x^2-y^2)\ \ldots (50)$$

Is bovendien nog de hoek, tusschen de overstaande beschrijvende lijnen des kegels, regt, zoo is eenvoudiglijk

$$x^4=r^2(x^2-y^2).$$

Hoezeer uit deze vergelijkingen blijkt, dat uit de snijding van een elliptischen of cirkelvormigen kegel wel kunnen voortkomen lemniscaten,

van welke de raaklijnen, gaande door den knoop, loodregt op elkander staan, zoo verkrijgt men in geen geval de lemniscata van Bernouilli. Maar de snijding van een' bol en kegel, in geval van dezen de zoogenaamde tophoek regt is, levert eene projectie op, welke is eene merkwaardige lemniscata; want de laatst verkregene vergelijking is dezelfde als de vergelijking (37) der lemniscata, over welke in § I, sub C, gehandeld is, gelijk dan ook, in eene noot aldaar, de wording dezer lemniscata uit de projectie der doorsnijding van een' bol en kegel reeds is vermeld. Doch het meer bijzondere, aan deze lemniscata toekomende, kan eerst te dezer plaatse worden opgemerkt, namelijk: *dat zij is de projectie eener sphaerische lemniscata, op de vooronderstelde wijze ontstaan, en zich juist over* de helft *van het bolvormig oppervlak uitstrekkende*, vermits de halve as r der lemniscatische projectie juist gelijk is aan den straal des bols, en dus juist is de projectie van een cirkel-quadrant.

Men vindt evenwel lemniscaten uit eene soortgelijke doorsnijding van een kegel en cylinder, of uit die van een kegel en van eene elliptische paraboloïde. De snijding van eene ellipsoïde en van eene tweevlakkige hyperboloïde geeft tot projectie, op een der voorname middenvlakken, ovalen of eironden, met soortgelijke figuren uit den kegel verkregen, en met de ovalen van *Cassini* in verband staande. Om de wording van geheel symmetrische lemniscaten uit den kegel en den bol, of de ellipsoïde te verklaren, was het ook noodig, eene der assen van de ellipsoïde of eene middellijn van den bol te doen invallen met eene der imaginaire assen van den kegel. Wil men evenwel de zaak uit een algemeener oogpunt beschouwen, en ook op scheeve en on-symmetrische lemniscaten letten, zoo moet men deze beperking uitsluiten. Doch het opzettelijk onderzoek van de nu opgenoemde bijzondere punten, gelijk ook de toepassing der algemeene formulen (8) en (9) op eenige der bovenstaande vergelijkingen, b. v. (48) en (50), wordt thans nagelaten, Met een enkel woord echter verdient nog melding gemaakt te worden van het ontstaan eener lemniscatische projectie van eene niet vlakke kromme lijn, verkregen door de snijding van eene el-

lip-

lipsoïde of van een' bol met een' cylinder, of ook zelfs bij de snijding van twee cylinder-vlakken. Indien b. v. eene ellipsoïde of een bol door eene kegelvlakte gesneden wordt, is de kromme van doorsnijding zelve lemniscatisch, namelijk eene sphaerische lemniscata op den bol, of eene conische lemniscata op den kegel. Bij de snijding van een' bol en van een' cylinder, kan op geen dezer oppervlakken eene lemniscatische kromme lijn geboren worden; maar voor zekeren bijzonderen stand van het projectie-vlak, kan de projectie der kromme lijn van doorsnijding eene strikvormige gedaante erlangen.

Zij een cirkelvormige cylinder, hebbende een' radius r; hare as ga door den oorsprong der coördinaten, en de beschrijvende lijnen denke men evenwijdig aan het coördinaten-vlak xy. Zij ook een bol, wiens radius is ρ; het centrum zij, op een afstand van den oorsprong $= a$, in de as y gelegen; zoo dan ρ is $> a - r$, zal er snijding van den bol en van den cylinder plaats grijpen. De kromme lijn van doorsnijding zal eene geslotene kromme lijn wezen; hare projectie op het vlak xz is eene lijn van den vierden graad; die op het vlak xy is eene parabola, of wel een parabolische boog, en dus eene opene kromme lijn. Doch men draaije nu den cylinder opwaarts, zoodat zijne as, welke oorspronkelijk gerigt ware langs de as van x, wel in het vlak xz blijve, maar met de as x een' hoek make, van welke de goniometrische tangens is τ; hierdoor ondergaat de figuur der projectie op het vlak xz geene verandering, maar die op het vlak xy verkrijgt van lieverlede een ander beloop, en in zekeren hellenden stand van den cylinder zal dit beloop lemniscatisch wezen. Men kan zich hiervan, met een weinig nadenken, ligtelijk overtuigen, en de mogelijkheid ook uit de vergelijking der projectie opmaken. Voor de aequatie van de cylinder-oppervlakte, bij den vooronderstelden hellenden stand der as, vindt men,

$$\tau^2 x^2_1 + (1+\tau^2) y^2_1 + z^2_1 - 2\tau x_1 z_1 = r^2(1+\tau^2),$$

terwijl de aequatie van den bol is

x^2_2

$$x^2_2 + (y_2 - a)^2 + z^2_2 = \rho^2 .$$

Waaruit door eliminatie van z, na $x_1 = x_2 = x$, $y_1 = y_2 = y$, $z_1 = z_2 = z$ te hebben gesteld,

$$\{(\tau^2 - 1)x^2 + (1 + \tau^2)y^2 - (y - a)^2 + \rho^2 - r^2(1 + \tau^2)\}^2 =$$
$$= 4\tau^2 x^2 \{\rho^2 - x^2 - (y - a)^2\} .$$

Deze is de vergelijking der projectie op het vlak xy; opdat zij, indien de projectie lemniscatisch is, den vorm hebbe van de algemeene aequatie der lemniscaten van de eerste orde, zoo moet vooreerst de oorsprong der coördinaten verplaatst worden langs de as y, in voege, dat zij kome in den knoop der kromme lijn, en ten anderen moet τ, die nog onbepaald is, de voegzame waarde erlangen voor het ontstaan eener symmetrische lemniscatische projectie. En men ziet ligtelijk, dat dit resultaat kan verkregen worden, wanneer men $y = y' + u$ substitueert, en in de ontwikkelde aequatie τ en u zoodanig bepaalt, dat de coëfficienten der onevene magten van y' en de geheel standvastige termen verdwijnen.

---

d. Wanneer de snijding van eene gebogene oppervlakte met een plat vlak, eene lemniscatische projectie heeft, moet de doorsnijding zelve eene vlakke lemniscata wezen. Zoodanige oppervlakken, welker doorsneden met eenig willekeurig plat vlak, óf altijd, óf meestal, lemniscatisch zijn, zou men lemniscatische oppervlakken kunnen noemen, al waren dan deze doorsneden niet altijd van een eigenlijk gezegden lemniscatischen vorm, mits slechts met dezen vorm verwant. De omwentelings-oppervlakte, hebbende eene lemniscata tot beschrijvende lijn, de kegel- en cylindervlakken, hebbende eenige lemniscata tot rigtlijn, geven er, als van zelve, voorbeelden van. De lemniscatische oppervlakken van de eerste orde zijn oppervlakken van den vierden graad, en onder deze komt, als merkwaardig

dig voorbeeld, in bijzondere aanmerking, de *voetring* (*tôre*). Denkt men een' cirkel, welks vlak gelegen is in het coördinaten-vlak xy, en het centrum in de as van x, op den afstand a van den oorsprong der coördinaten, en laat men dezen cirkel (hebbende een' radius $=r$) om de as van y omwentelen, zoo is de vergelijking der voortgebragte ringvormige oppervlakte

$$\{x^2+y^2+z^2+a^2-r^2\}^2 = 4a^2(z^2+x^2)\,.$$

De snijding van dit oppervlak met een plat vlak zal kunnen wezen een ovaal, een ingedrukt ovaal, een koppel van ovalen, eene lemniscata, een koppel van concentrische of ook van niet concentrische, maar even groote, cirkels, enz. Deze uitkomsten zijn te zeer bekend, om er opzettelijk aanwijzing van te doen. Ten aanzien der snijdingen, welke lijnen van den vierden graad opleveren, bestaan derhalve alle die vormen, welke tot de cassinoïde behooren. De lemniscatische snijdingen heeft men door elk snijvlak, dat tevens raakvlak is voor eenig punt van het convex-concave of inwendige gedeelte des rings. Is b. v. dit snijdend raakvlak evenwijdig aan de as van omwenteling, zoo ontstaat er eene volstrektelijk symmetrische lemniscata, van welke de vergelijking onder regthoekige coördinaten, als de oorsprong in den knoop is, zal wezen

$$(x^2+y^2)^2 = 4a\{rx^2-(a-r)y^2\} \quad \ldots\ldots \quad (51)$$

Deze lemniscata behoort derhalve tot de soort, welke in § I, sub B, 2°, is overwogen, en welke de vergelijking (25) tot algemeene aequatie heeft. En wanneer $a=2r$, of $r=\frac{1}{2}a$ is, zal deze lemniscata overgaan in eene bernouilliaansche, hebbende a tot excentriciteit of $a\sqrt{2}$ tot halve assen.

Hierbij is $a>r$ verondersteld; stelt men $a=r$, zoo heeft de ring geene opening; het snijdend raakvlak is daarbij een vlak, gaande door het middelpunt en door de omwentelings-as, derhalve een meridiaanvlak; — de doorsnijding bestaat uit twee even groote cirkels, die elkander uitwendig raken. De lemniscata kan dus overgaan in een stelsel van twee cirkels, wanneer de beide leden van hare vergelijking quadraten zijn, of liever,

wan-

wanneer het tweede lid, zoowel als het eerste, eene volledige tweede magt is. Men zou ook kunnen zeggen, dat de lemniscatische gedaante meer en meer nabij de cirkelvormige komt, naar gelang de hoek, tusschen de as en de centrale raaklijnen, meer en meer tot een' regten hoek nadert; of wel, twee even groote, elkander uitwendig rakende cirkels kunnen aangemerkt worden te zijn de strikken eener lemniscata, welker centrale raaklijnen loodregt staan op de ware as der kromme, en derhalve in of langs elkander vallen.

Men zou deze beschouwingen kunnen uitstrekken, hetzij om andere vormen van lemniscaten, hetzij om lemniscaten van hoogere orde te zien voortkomen, door aan te nemen, óf, dat de beschrijvende kromme lijn geen cirkel is, maar eene ellips, eene lemniscata of eene andere geslotene kromme lijn; — óf, dat de beschrijvende kromme geene standvastige afmetingen heeft, b. v. een cirkel met afnemenden radius, zoodat de ring, aan de eene zijde van het centrum, eene grootste, en, aan de tegenoverstaande zijde, eene kleinste dikte hebbe, enz. enz.

De voetring is een omwentelingsligchaam; de beschrijvende kromme is een cirkel, en de rigtlijn mede een cirkel, in welks omtrek het middelpunt der beschrijvende kromme steeds moet verblijven, terwijl het vlak der beschrijvende kromme voortdurend normaal tot de kromlijnige rigtlijn is. Maar de rigtlijn kan ook elliptisch wezen, of eene andere geslotene kromlijnige gedaante hebben, terwijl de beschrijvende lijn, cirkelvormig, elliptisch, enz. enz. kan zijn, zoodat de snijdende raakvlakken van deze anders gefigureerde ringen lemniscaten van zeer verschillend beloop zullen opleveren. Eveneens moet men lemniscatische snijdingen verkrijgen, wanneer de ring niet gesloten maar open is, gelijk een goot- of kanaal-oppervlak, waarbij alzoo de rigtlijn wederom geheel willekeurig kan zijn. Zelfs kan, in een algemeenen zin, de beschrijvende lijn ook open wezen; ware in dit geval de rigtlijn gesloten, en b. v. een cirkel of eene ellips, maar de beschrijvende lijn eene hyperbola, dan zou de ringvormige oppervlakte eigenlijk eene eenvlakkige hyperboloïde zijn, en de lemniscatische sectie zou uit

uit een stelsel van twee regte lijnen bestaan, welke tevens de plaats van centrale raaklijnen zouden bekleeden. Gelijk dus boven de verwantschap der lemniscata met den cirkel werd opgemerkt, blijkt hier wederom hare betrekking tot de regte lijn, genoegzaam zoo als dit met de kegelsneden het geval is.

Bijaldien men zich ter beschouwing voorstelde de oppervlakken van den vierden graad, die lemniscatisch zijn, en derhalve, door eenig willekeurig plat vlak gesneden zijnde, snijdingen zullen geven, welker vorm of beloop overeenkomt met den vorm der kromme lijnen, in § I overwogen, zou men, geheel in overeenstemming met de beschouwing der oppervlakken van den tweeden graad, het onderzoek moeten bepalen tot die oppervlakken, welker vergelijkingen begrepen zijn in de aequatie

$$(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)^2 = \alpha^6x^2+\beta^6y^2+\gamma^6z^2 \quad . \; . \; . \; . \; (52)$$

Ongetwijfeld zou dit onderzoek hoogst belangrijk wezen, en eene zeer ruime stoffe tot gewigtige en uitgebreide toepassingen der analysis opleveren. Hetzelve ligt evenwel buiten mijn bestek, en ik vestig eeniglijk de aandacht op deze soort van oppervlakken, welker vlakke snijdingen óf lemniscaten moeten wezen, óf kromme lijnen, die met de lemniscaten verwant zijn. Zoo is, b. v., in geval $\alpha^6=\beta^6$, de voorname snijding in het coördinaten-vlak xy eene ovale kromme lijn, niet verschillende van de kromme in § I, sub A, overwogen. Zoo verre ik weet, zijn deze oppervlakken nog niet op eene algemeene en volledige wijze betracht, maar wel kent men sommige oppervlakken van deze soort, schoon niet bepaaldelijk als lemniscatische oppervlakken. Onder deze verdient allezins genoemd te worden de oppervlakte, welker beschouwing van aanbelang is in de *theorie der dubbele refractie*, en door FRESNEL onderscheiden met de benaming van *elasticiteits-oppervlakte*. De vergelijking van dit oppervlak is

$$(x^2+y^2+z^2)^2 = p^2x^2+q^2y^2+r^2z^2\,;$$

 de

de hoofdsnijdingen zijn de lemniscatische ovalen, welker punten zijn de voetpunten der normalen, uit het middelpunt eener ellips op hare raaklijnen getrokken, derhalve de zoogenaamde *voetpunten-kromme* der ellips (§ I, B, 1°). De voetpunten-kromme der hyperbola — zijnde eene eigenlijke lemniscata (§ I, B, 2°) — kan eveneens worden verkregen, wanneer de bovenstaande vergelijking beschouwd wordt als eene algemeene aequatie, welke diensvolgens, in haar tweede lid, één of twee termen met een negatief teeken kan hebben. En inderdaad kent men ook die vergelijking als te behooren tot zoogenaamde *voetpunten-oppervlakken*, welker punten namelijk zijn de voetpunten der normalen, getrokken uit het middelpunt eener oppervlakte van den tweeden graad op de raakvlakken van hare punten, gelijk men zich daarvan, door eene eenvoudige berekening, kan overtuigen. Overigens verwijs ik naar twee geleerde verhandelingen, de eene (van vroegere dagteekening) door PLÜCKER, over het *golven-oppervlak*, voorkomende in het 19 deel, pag. 1—44, van het *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, uitgegeven wordende door den heer CRELLE te *Berlijn*, — de tweede, uitsluitend over de hier bedoelde voetpunten-oppervlakken (en wel inzonderheid over derzelver quadratuur en cubatuur) door den Italiaanschen wiskundige TORTOLINI geschreven, en bekend gemaakt in hetzelfde *Journal*, deel 31, pag. 12—40.

𝔈. Indien men goedvindt, om de wording eener lemniscata *mechanisch* te noemen, bijaldien zij ontstaat door de beweging van een punt, volgens zekere wet, welke kan voortkomen, hetzij uit eene beweging van regte of kromme lijnen langs kromme lijnen of langs gebogene oppervlakken, hetzij uit de werking van krachten op een stoffelijk punt, alsdan bestaan er ook van deze soort van generatie voorbeelden.

Men zou onder die voorbeelden kunnen rangschikken, dat van de veranderlijke beweging der schaduw van het uiteinde des stijls eens zonnewijzers, hetzij op den middag, hetzij op een ander dag-uur, opdat die

scha-

schaduw steeds het oogenblik van middelbaren tijd aanwijze. Van dag tot dag verandert de plaats der schaduw van dien top, en over een geheel zonnejaar gerekend, vormen deze schaduw-einden — telkens in de doorsnijding van eene regte lijn en van een der takken eener hyperbola gelegen — de punten der zoogenaamde *meridiaan-kromme lijnen*, welke eene lemniscatische gedaante hebben, en van welke men, met behulp eener functie voor de tijds-vereffening, de vergelijking zou kunnen opmaken; maar het zijn lemniscaten met ongelijke en on-symmetrische strikken.

Als voorbeeld der beschrijving eener lemniscata door de beweging van een stoffelijk punt, kent men ook dat, bij hetwelk dit punt, onder de werking der zwaartekracht, gedwongen is, een' kromlijnigen boog te beschrijven, in denzelfden tijd, welke voor de daling langs de koorde gevorderd wordt. Deze kromme lijn is de bernouilliaansche lemniscata; maar het is slechts een boog, die beschreven wordt, en geenszins de geheele kromme lijn, door onafgebrokene beweging. In het XI deel, pag. 28, van het *Journal de mathématiques pures et appliquées*, door LIOUVILLE, wordt deze eigenschap der lemniscata vermeld, alsof zij gevonden ware door FUSS (*Mémoires de l'Acad. de St. Petersbourg, pour l'année 1824*). Ik vind nogtans in een engelsch werk, verschenen in 1842, en getiteld »*A collection of pro-* »*blems in illustration of the principles of theoretical mechanics, by* »WILLIAM WALTON" (pag. 239), dat deze eigenschap was opgemerkt door den italiaanschen wiskundige SALADINI, en bekend gemaakt in de »*Me-* »*morie dell' Istituto nazionali Italiano, Tomo I, parte 2,*" (het jaartal wordt niet opgegeven). Ook is dezelfde eigenschap in meer algemeenen zin uitgedrukt door BONNET, in hetzelfde aangehaalde deel van LIOUVILLE's *Journal*, pag. 116.

Bij de werking van ééne centrale kracht kan de lemniscata van BERNOUILLI door onafgebrokene beweging beschreven worden, wanneer de kracht haar middelpunt heeft in den knoop der lemniscata, en met een vermogen werkt, omgekeerd evenredig aan de *zevende magt* van den afstand tot het bewogen punt. Ook dit is opgeteekend en verklaard in het genoemde

werk van WALTON, pag. 190. En nog wordt er eene lemniscata van BERNOUILLI beschreven, wanneer een stoffelijk punt, onder de werking van twee krachten, met *eenparige snelheid* bewogen wordt. Daartoe moeten de krachten werken in twee vaste middelpunten; zij moeten, op gelijke afstanden van het stoffelijk punt, een gelijk vermogen uitoefenen, hetwelk, voor elke kracht afzonderlijk beschouwd, *omgekeerd evenredig is* aan de *eerste magt* van den afstand; en de beweging van het punt, met eene gegevene snelheid, moet aanvangen in het midden van de lijn, welke de middelpunten der werkende krachten verbindt (zie hetzelfde werk, pag. 178). (6)

Onder de lemniscaten van hoogere orde, die eene mechanische wording kunnen hebben, is eene soort van de tweede orde, omtrent welker beschrijving ik in eenige meerdere ontwikkeling wil treden, zoo om ten slotte een voorbeeld te geven, toepasselijk op lemniscaten eener andere orde dan de vroeger beschouwde, als omdat ook de wording dezer lemniscaten aan die van BERNOUILLI toekomt. Men kent deze wording uit de werking van een mechanisch orgaan, onder anderen in stoommachinen voorkomende.

Zij AB of BAC (*fig.* 1) een hefboom, draaibaar om eene spil bij A; A′B′ een tweede, hooger of lager geplaatste hefboom, of eenvoudiglijk een arm, draaibaar om eene spil bij het uiteinde A′. Laat aangenomen worden, dat de rigtingen dezer hefboomen in hetzelfde vlak zijn gelegen, dat de armen AB en A′B′ even lang zijn, en dat, het vlak dezer hefboomen verticaal zijnde, de horizontale afstand van derzelver draaipunten gelijk zij aan het dubbel der lengte van elk der armen AB of A′B′; zoo dan de hefboomen horizontaal gerigt zijn, zal de rigting van de lijn BB′, door de vrije uiteinden B en B′ gaande, verticaal wezen, en invallen met eene der inwendige raaklijnen MN van de beide even groote cirkels, door de uiteinden B en B′ beschreven, wanneer elk der hefboomen gedraaid wordt. De-

(6) Zeer waarschijnlijk zal dit andere voorbeeld der beschrijving eener lemniscata geleid zijn uit eene beschrijving van EULER, voorkomende in zijne *Mechanica sive motus scientia*, Tomo I, Prop. 92, Cor. 1.

Deze vooronderstellingen worden tot meerdere eenvoudigheid aangenomen; volstrekt noodzakelijk is zulks niet.

Men denke verder de uiteinden B en B′ gekoppeld door eene stang BPB′, hebbende eene lengte, gelijk aan den verticalen afstand der draaipunten A en A′. Deze koppeling hebbe plaats door middel van spillen of scharnieren bij B en B′, zoodat, als b. v. de hefboom AB op- of nedergedraaid wordt door den boog BD of BE, deze beweging kunne gevolgd worden door de *koppelstang* BB′ en den arm A′B′, die daarbij verschillende standen zullen aannemen, van welke de beide uiterste in de figuur zijn voorgesteld bij DD′, D′A′ en EE′, E′A′. Is nu P het midden der koppelstang, en zijn de bogen BD en BE van geene veel grootere uitgestrektheid dan van ongeveer 18 of 20 graden, zoo blijft het punt P, staande den op- en nedergang der hefboomen, genoegzaam in de rigting der raaklijn MN, en met de afwisselend cirkelvormige beweging van den hefboom CAB wordt alzoo, zeer nabij, eene afwisselend regtlijnige beweging verkregen van het punt P, en dus ook van eenig werktuigelijk deel (b. v. eener pompstang, enz.), dat, bij P, met eene spil, aan de koppelstang BB′ mogt verbonden zijn. De arm A′B′ is hier dus eene zoogenaamde *trekstang*, welke dient om de koppelstang BB′, bij de beweging van den hefboom CAB, voortdurend zooveel terug te trekken, als noodig is om te voorkomen, dat het midden P merkbaar van de verticale rigting afwijke.

Op grond der werking van dit eenvoudig zamenstel berust de inrigting, door JAMES WATT aan de balansen van zijne verbeterde stoomwerktuigen gegeven, om, met tusschenkomst van een zoogenaamd scharnier-parallelogram, de afwisselend draaijende beweging eener balans te ontleenen van de op- en nedergaande beweging eener stoom-zuigerstang, zonder dat deze merkbaar afwijke van de zuiver regtlijnige rigting, noch eene te nadeelige trillende beweging (door de afwijkingen aan wederzijden van de regte lijn veroorzaakt) erlange. WATT maakte op eene vernuftige wijze gebruik van dit middel; het behoort hem nogtans niet, maar was reeds vroeger bekend geweest, en ter beweging van stangen bij pompwerken aangewend.

Het

Het is overigens onnoodig, om nader te verklaren, hoedanig dit mechanisch orgaan in de zamenstelling van het stoommachinen-parallelogram voorkomt, ook al ware de inrigting niet zeer bekend, noch in geschriften over, of in beschrijvingen van stoomwerktuigen, omstandig aangewezen.

Gelijk gezegd is, zal de beweging van het punt P slechts nabij regtlijnig wezen. Draait men den hefboom CAB verder en verder op of neêr, zoo wijkt P meer en meer van de lijn MN af, en de beweging zoo verre uitstrekkende als mogelijk is, zal P eene symmetrische lemniscata beschrijven, hebbende haren knoop in het punt, alwaar AA′ en MN elkander snijden, dat is in het inwendig gelijkvormigheidspunt der beide cirkels, door B en B′ beschreven, en alwaar P zich bevindt, bijaldien de rigtingen van beide hefboomen of armen AB, A′B′ evenwijdig loopen, zoo als de figuur voorstelt. De as dezer lemniscata staat loodregt op de middelpuntslijn AA′, en de lijn MN is ééne der centrale raaklijnen. Het punt P beschrijft dus eigenlijk dat gedeelte van een' lemniscatischen boog, hetwelk, aan wederzijden van den knoop der kromme lijn, weinig van de centrale raaklijn afwijkt, en vermits in sommige lemniscaten deze afwijking niet zeer spoedig aangroeit, zoo is daarin de reden gelegen, waarom men, voor geene te ver uitgestrekte op- en neêrgangen der hefboomen, de beweging van het punt P genoegzaam regtlijnig kan achten; moetende de grenzen van die uitgestrektheid bepaald worden overeenkomstig de betrekkelijke lengten der hefboomen en der koppelstang.

Meetkundig voorgesteld, komt het onderzoek neder op de bepaling der kromme lijn, beschreven door het midden eener regte lijn van bepaalde lengte, welke verplaatst wordt tusschen de omtrekken van twee even groote cirkels, zoodat hare uiteinden steeds in deze omtrekken verblijven. Het is duidelijk dat dit problema slechts een zeer bepaald geval insluit van een meer algemeen werkstuk, bij hetwelk de cirkels A en A′, benevens de regte lijn BB′, door kromme lijnen (die zelfs niet vlak behoeven te wezen) worden vervangen, en het punt P eenig willekeurig punt der bewogene kromme lijn is. Ook in den meer beperkten zin van cirkels en regte lijnen is het

het voorgesteld problema niet algemeenst; daartoe zou men moeten aannemen willekeurige lengten voor de hefbooms-armen AB, A′B′, eene willekeurige plaats voor het beschrijvende punt P der koppelstang, en zoodanige verwijdering der middelpunten A en A′, dat, in den evenwijdigen stand des hefbooms of der armen AB, A′B′, de rigting der koppelstang BB′ geene raaklijn tot de beide cirkels ware. Voor het tegenwoordig oogmerk wordt evenwel alleenlijk het nu laatstgenoemde gedeelte der meer algemeene vooronderstelling aangenomen, zoodat AB = A′B′, BB′ willekeurig, maar P het midden van BB′ zij.

Laat (*fig.* 2) de lijn XX′, loodregt door het midden O van de lijn AA′ der middelpunten getrokken, als abscissen-as worden aangenomen, en alzoo de onbepaalde lijn YY′, op welke deze middelpunten liggen, als ordinaten-as; zij OA = OA′ = a, AB = A′B′ = r, en de lengte der koppelstang BB′ = b; in elken stand der lijnen AB, A′B′ en BB′ moeten derhalve de coördinaten OQ = x en PQ = y van het midden P der lijn BB′ bepaald worden; zoo men de coördinaten van B noemt Oa = x_1, aB = y_1, en (overeenkomstig den in de figuur voorgestelden stand der lijnen) die van B′, Oa' = $-x_2$, B′a' = $-y_2$, zal *vooreerst* de plaats der punten B en B′ bepaald wezen door de vergelijkingen der beide cirkels, te weten door

$$x^2{}_1 + (a - y_1)^2 = r^2 \text{ , ... } (\alpha)$$

$$x^2{}_2 + (a + y_2)^2 = r^2 \text{ . . . . } (\beta)$$

Ten *anderen* heeft men de voorwaarde BB′ = b door de aequatie

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = b^2 \text{ . . . . } (\gamma)$$

En in de derde plaats

$$OQ = x = \tfrac{1}{2}(x_1 + x_2) \text{ . . . . } (\delta)$$

$$PQ = y = \tfrac{1}{2}(y_1 + y_2) \text{ . . . . } (\varepsilon)$$

Eene vergelijking tusschen x en y, dat is de vergelijking der lemniscatische kromme lijn, zal men hebben bij de eliminatie van x_1, y_1, x_2, y_2,

uit deze *vijf* vergelijkingen. Op het eenvoudigst geraakt men daartoe op deze wijze: neem het verschil van (α) en (β); substitueer daarin de waarden van $(x_1 - x_2)$, $(x_1 + x_2)$, $(y_1 + y_2)$, afgeleid uit (γ), (δ), (ε), zoo komt men tot:

$$x^2 \{b^2 - (y_1 - y_2)^2\} = y^2 \{2a - (y_1 - y_2)\}^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; (\zeta)$$

Neem de som van (γ) en ~~die~~ der tweede magten van (δ) en (ε); trek er van af de som van (α) en (β); los uit dit verschil $(y_1 - y_2)$ op, en substitueer de waarde in (ζ), waardoor men verkrijgen zal:

$$x^2 \{16\, a^2 b^2 - [b^2 + 4\,(a^2 - r^2) + 4\,(x^2 + y^2)]^2\} =$$
$$= y^2 \{8\, a^2 - [b^2 + 4\,(a^2 - r^2) + 4\,(x^2 + y^2)]\}^2 \quad . \; . \; . \; . \; (53)$$

Deze is de vergelijking der lemniscata, zijnde eene lijn van den zesden graad, of eene lemniscata van de tweede orde. Men kan deze vergelijking ook brengen tot den vorm:

$$\{(x^2 + y^2)\,[b^2 + 4\,(a^2 - r^2) + 4\,(x^2 + y^2)] - 8\, a^2 y^2\}^2 =$$
$$= 16\, a^2 x^2 \{b^2 x^2 - (4\, a^2 - b^2)\, y^2\}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; (54)$$

welke meer overeenkomt met den vorm der vergelijkingen van de lemniscaten der eerste orde. Stelt men O als pool, en de polaire coördinaten ρ en φ, en verder tot bekorting

$$\mathrm{A} = b^2 + 4\,(a^2 - r^2),$$

zoo is de ontwikkelde pool-aequatie

$$16\, \rho^4 + \{8\mathrm{A} - 64\, a^2 \sin.^2 \varphi\}\, \rho^2 = 16\, a^2 b^2 - \mathrm{A}^2 - 64\, a^2 r^2 \sin.^2 \varphi \quad . \; (55)$$

Wanneer men in de vergelijking (54) x standvastig aanneemt, zal de ontwikkelde aequatie zijn eene derde-magts-vergelijking van den zesde-magts-vorm; twee der wortels zullen onbestaanbaar wezen, en de bestaanbare wortel y^2 zal twee gelijke maar tegenovergestelde waarden van y doen bekend worden; bovendien wordt $y = 0$ voor $x = 0$ en $x = \pm \sqrt{\{r^2 - (a - \frac{1}{2} b)^2\}}$, en tusschen deze grenswaarden van x is y steeds bestaanbaar, maar onbestaanbaar voorbij dezelve; en hieruit kan met grond

grond tot den symmetrischen lemniscatischen vorm der kromme besloten worden. Dat de kromme wezenlijk lemniscatisch, en, ten opzigte der beide lijnen XX′ en YY′, symmetrisch is, wordt nogtans gemakkelijker uit de poolvergelijking (55) opgemaakt.

De lemniscata verkrijgt andere vormen, of de vergelijkingen (54) en (55) leveren stoffe op tot meer of minder belangrijke opmerkingen, naar gelang der bijzondere betrekkingen tusschen de parameters a, b en r.

1°. Zoo lang b. v. de lijn BB′ korter is dan de afstand der middelpunten, dat is, zoo lang $b < 2a$, bestaat er voor de hoeken OAB en OA′B′ een maximum, voorbij hetwelk geene beweging der stangen mogelijk is. Van af die grens moet de beweging in den tegengestelden zin plaats grijpen, en van beide de armen AB, A′B′ worden alsdan ook de hoeksbewegingen verwisseld. De beschrevene lemniscata zal daarbij steeds zoodanig gerigt wezen, dat hare as invalle met de abscissen-as XX′. Maar wordt $b = 2a$, alsdan kan elk der armen den geheelen omtrek van den overeenkomstigen cirkel rondgaan; de as der lemniscata valt daarbij langs de as YY′, en de lemniscata zelve wordt van eene lagere orde, te weten van de eerste orde, en verschilt ook niet van die, welke uit de gewone hyperbola oorsprong neemt. Men kan dit uit de vergelijkingen (ζ) en (54), of ook uit (55) opmaken. De vergelijking (54) b. v. wordt, in de vooronderstelling van $b^2 = 4a^2$, volkomen quadraat in het tweede lid, en na den wortel te hebben getrokken, vindt men bij verdere eenvoudige herleiding

$$(x^2+y^2)^2 - r^2(x^2+y^2) + 2a^2x^2 = \pm 2a^2x^2.$$

Daar nu met het bovenste teeken de vergelijking tot een′ cirkel behoort, en zulks wel mogelijk is en ook moet, als de armen AB en A′B′ steeds te gelijk aan dezelfde zijde van YY′ blijven (zoodat zij voortdurend parallel blijven, gelijk alsdan ook BB′ evenwijdig blijft aan YY′), maar in strijd is met de vooronderstelde tegengestelde rigting en beweging dier armen, zoo moet in het tweede lid der voorgaande aequatie het onderste teeken genomen worden, en de eindvergelijking wordt daardoor

$$(x^2+y^2)^2=r^2y^2-(4a^2-r^2)x^2\ ,$$

welke vergelijking, bij verwisseling der coördinaten x en y, behoort tot eene lemniscata der eerste orde, welke is de zoogenaamde voetpunten-kromme der gewone hyperbola (vergelijk § I, B, 2°. aequatie (25)), hebbende r en $\sqrt{(4a^2-r^2)}$ tot halve ware en onbestaanbare assen. De as der lemniscata zal dus $=2r$ wezen, en de tangenten, gaande door den knoop O, zullen met de as een hoek maken $>45°$, zoo lang de cirkels A en A′ elkander niet snijden, of ook, bijaldien zij elkander snijden, zoo lang $a^2>\frac{1}{2}r^2$ is.

2°. Wordt $4a^2=2r^2$, of $a^2=\frac{1}{2}r^2$, zoo gaat de lemniscata over in eene bernouilliaansche, hebbende $2r$ tot as en de middelpunten A en A′ der beide cirkels tot brandpunten. Deze beide cirkels moeten elkander, in dit geval, zoodanig snijden (*fig.* 3), dat de lengte der gemeenschappelijke koorde BB′ juist gelijk zij aan den afstand der middelpunten A en A′; want alsdan is $OB=OB'=OA=OA'=a$, en dus $2.OA^2=AB^2$, of $2a^2=r^2$ (7).

Indien AB, A′B′, BB′ een zamenstel van stangen ware, om, uit eene afwisselend cirkelvormige of draaijende beweging, eene afwisselend op- en neêrgaande of heen en weêrgaande beweging af te leiden, of omgekeerd, zou de regtlijnige beweging gerigt moeten wezen langs de lijn CC′, deelende den regten hoek AOB midden door. Om goede redenen heeft men bij

---

(7) Hieruit volgt derhalve eene constructie, zoowel der bernouilliaansche lemniscata, als van die, welker punten zijn de projectiën van het centrum eener ongelijkzijdige hyperbola op hare raaklijnen. Voor de uitvoering is zij geenszins de doelmatigste, doch zij is merkwaardig, als verkregen wordende door eene onafgebrokene beweging, en onafhankelijk van de voorafgaande constructie eener hyperbola. In dezen zin is over de constructie dier beide lemniscaten reeds gehandeld, in het *Archiv der Mathematik und Physik, herausgegeben von* J. A. Grunert, *Professor zu Greifswald, Theil III, Seite 400*, en *Theil VIII, Seite 50.*

bij stoommachinen van zoodanig zamenstel weinig gebruik gemaakt; — meestal bepaalt men den stand der cirkels zoodanig, dat zij elkander niet snijden, en zelfs niet raken. Vroeger heeft men zich evenwel bij sommige stoomwerktuigen — of ook bij werktuigen, door eenige beweegkracht gedreven, en bestemd om pompen te doen werken — van een zamenstel bediend, veel overeenkomst met het hier bedoelde hebbende, om eene op- en neêrgaande beweging uit eene aanhoudend rondgaande beweging te verkrijgen, wanneer de afwijkingen van de regtlijnige rigting geen nadeel aan de uitwerking konden toebrengen (zie b. v. LANZ et BÈTANCOURT, *Essai sur la composition des machines* § VII, (S, 7') Planche 11).

3°. De vergelijkingen (54) en (55) verkrijgen ook nog eene meer eenvoudige gedaante, wanneer b, a en r zich zoodanig verhouden, dat, als in den evenwijdigen stand der armen Ab, A'b' (*fig.* 2) de verbindingslijn bb' door den knoop O gaat, deze lijn tevens eene raaklijn tot de beide cirkels is. Daartoe moet $(\frac{1}{2}b)^2 + r^2 = a^2$, of $b^2 = 4(a^2 - r^2)$ wezen; doch veelal is dan ook nog in de toepassing (*fig.* 1) $b = r$, en dus $a^2 = \frac{5}{4}r^2$. De vergelijking (54) wordt daardoor, na divisie met 4,

$$\{2(x^2+y^2)^2 + r^2(x^2-4y^2)\}^2 = 5r^4x^2(x^2-4y^2);$$

zoo men deze ontwikkelt, alsdan den term $r^4(x^2-4y^2)^2$ in het tweede lid brengt, nogmaals door 4 deelt, en bij de termen, in het tweede lid, voegt $r^4x^2y^2 - r^4x^2y^2$, komt er eene aequatie, deelbaar door (x^2+y^2), en het quotient is

$$(x^2+y^2)\{(x^2+y^2)^2 + r^2(x^2-4y^2)\} = r^4(x^2-4y^2) \quad . \; . \; (56)$$

en de poolvergelijking wordt

$$\rho^4 + r^2(1-5\,sin.^2\,\varphi)\rho^2 = r^4(1-5\,sin.^2\,\varphi); \quad . \; . \; . \; . \; . \; (57)$$

of, beknopter,

$$1-5\,sin.^2\,\varphi = \frac{\rho^4}{r^2(r^2-\rho^2)}.$$

r zal steeds grooter dan ρ wezen, en de hoek tusschen de as en de cen-

 trale

trale raaklijnen kleiner dan 30°. De volstrekte grootste waarde van ρ vindt men door ρ^2, en wel door deze uitkomst: zoo men het vierkant r^2 van den straal des cirkels in uiterste en middelste reden verdeelt, zal de inhoud van den grootsten der twee regthoeken, dat is der twee deelen van r^2, gelijk zijn aan den inhoud ρ^2 van het vierkant, op de halve as der lemniscata beschreven. En van den hoek, tusschen de as en de centrale tangenten, is de volstrekte waarde zeer nabij 26° 34′.

4°. Voor het geval, dat laatstgenoemde hoek 45° bevatte, zou de overeenkomstige lemniscata meest met die van Bernouilli moeten overeenkomen. De vraag is, welke betrekking moet daartoe tusschen b en r bestaan? *Vooreerst* moet de onderstelling van het voorgaande geval ook hier aangenomen worden, te weten $b^2 = 4(a^2 - r^2)$; — althans eene andere vooronderstelling, in plaats van dezelve, zou eerder iets willekeurigs inhouden. Ten *anderen* leert de vergelijking (55) eene grenswaarde van $sin.^2 \varphi$, wanneer $\rho = 0$ wordt; stelt men deze waarde, voor $\varphi = 45°$, $= \frac{1}{2}$, en substitueert men daarin $a^2 = r^2 + \frac{1}{4} b^2$, zoo komt $b = 2r$. Zullen alzoo de centrale tangenten der lemniscata, door het punt P (*fig.* 1) beschreven, loodregt op elkander staan, of halve regte hoeken met de as der lemniscata maken, zoo moet de koppelstang BB′ $= b$ eens zoo lang wezen als elke der gelijke trekstangen AB of A′B′. Ergo zal dan BP = AB zijn; dus hoek APB = 45°; waaruit dus voortvloeit dit bijzondere, dat de centrale tangenten der lemniscata ook juist zullen wezen de inwendige raaklijnen van de beide cirkels, door de hefbooms-einden B en B′ om de vaste middelpunten A en A′ beschreven. Deze bijzonderheid bestaat niet bij het voorgaande geval, als $b = r$ is; want BB′ = AB zijnde, is BP $= \frac{1}{2}$ AB; derhalve is hoek APB = 60°, en zijn complement BPX = 30°, terwijl de hoek, tusschen de as der beschrevene lemniscata en de centrale tangenten niet is 30°, maar zeer nabij 26° 34′.

Voor het onderwerpelijke geval van $b = 2r$, en $a^2 = 2r^2$, zal men uit (54) en (55) voor de vergelijkingen der lemniscata vinden:

$(x^2$

$$(x^2+y^2)\{(x^2+y^2)^2+4r^2(x^2-y^2)\}=4r^4(x^2-y^2) \quad . \; . \; . \; (58)$$

$$\rho^4+4r^2\rho^2 \cos.2\varphi=4r^4 \cos.2\varphi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (59)$$

De halve as dezer lemniscata is dus, evenmin als die der lemniscata van het voorgaande geval, gelijk aan den radius r der cirkels; hare volstrekte grootte is $=r\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)=0{,}9096.r$. Bijaldien men derhalve, tusschen dezelfde centrale tangenten, eene bernouilliaansche lemniscata construeert, hebbende r tot halve as, zal de hier overwogene lemniscata van de tweede orde geheel en al binnen de lemniscata van Bernouilli gelegen zijn: haar beloop, in de nabijheid van den knoop, zal dus eenigzins spitser wezen, dat is spoediger van de rigtingen der raaklijnen afwijken, dan bij de bernouilliaansche lemniscata plaats vindt. Noemt men, op de rigtingen der voerstralen ρ, de lengte der voerstralen van de bernouilliaansche lemniscata R, zoo is $R^2=r^2 \cos.2\varphi$, ergo kan men, ingevolge de vergelijking (59), stellen

$$\rho^4+4\rho^2R^2-4r^2R^2=0 \;,$$

of

$$R^2=\frac{\rho^4}{4(r^2-\rho^2)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (60)$$

zijnde eene niet onbelangrijke betrekking, tusschen de hoegrootheden der eveneens gerigte voerstralen van de beide weinig verschillende lemniscaten, en van welke, onder anderen, voor de rectificatie van de hier bedoelde lemniscata der tweede orde, gebruik gemaakt zou kunnen worden.

De onderstelling van $b=2r$ kan nog in een ander geval genomen worden, zoodat de beschrevene lemniscata is van de eerste orde, maar de lijn BB′ kan daarbij nimmer raaklijn van de beide cirkels wezen. Dit geval heeft plaats als men $a=r$ neemt; de beide cirkels raken elkander alsdan, en b nu $=2r$ stellende, dat is $b=2a$, verkrijgt men wederom eene lemniscata, met hare as langs de middelpuntslijn AA′ gerigt, klaarblijkelijk zoo als in het eerste der vier overwogene gevallen, en vermits de halve

as

as der lemniscata ook nu nog $= r$, dat is $= a$ is, zullen hare toppen zijn de beide middelpunten A en A'.

Nog andere onderstellingen tusschen b, r en a, meer of minder overeenkomende met die, welke men in het werkdadige aanneemt, worden hier buiten overweging gelaten, en ik eindig deze korte beschouwingen met eene enkele opmerking, aangaande den weg, dien men zou moeten volgen bij het onderzoek, wanneer de hefbooms-armen AB en A'B' ongelijk in lengte waren. Zijn namelijk deze armen ongelijk, dan is *niet* het midden P der koppelstang het punt, welks rigting van beweging op zekere uitgestrektheid genoegzaam regtlijnig is, indien de hefboomen afwisselend gedraaid worden, maar de beschouwing leert, dat deze uitwerking nabij zal plaats vinden, zoo het beschrijvend punt der koppelstang is het punt, verdeelende hare lengte in de omgekeerde reden van de stralen der cirkels, door de uiteinden der armen of trekstangen beschreven. Laten AB en A'B' (*fig.* 4) de ongelijke armen wezen, die om de vaste punten A en A' draaijen, en door de koppelstang BB' vereenigd zijn; even zoo als in het geval van gelijke of even lange armen, kan hier de betrekking tusschen de lengten AB, A'B', AA', BB' zeer verschillend wezen. Neemt men b. v. aan, dat bij de evenwijdige rigting der armen AB en A'B' — werkelijk voorgesteld in de figuur, — de rigting der koppelstang BB' invalt met de overeenkomstige inwendige raaklijn der beide cirkels, zoo is het snijpunt O met de middelpunts-lijn AA' tevens het inwendige gelijkvormigheidspunt der beide cirkels, en in dit punt wordt de lijn BB' gedeeld in de regte reden der stralen AB en A'B'. Makende derhalve, B'P = BO, zoo is P het punt, in hetwelk de verdeeling van BB' in de omgekeerde reden van de stralen AB en A'B' plaats vindt: dit punt der koppelstang zal dan, bij eene niet zeer uitgestrekte afwisselend draaijende beweging der hefboomen, genoegzaam regtlijnig heen- en weêr- of op- en neêrgaan, en dit punt zal derhalve ook het beschrijvende punt der lemniscata wezen. Wegens BO = B'P, is er een stand der hefboomen of armen, bij welke de rigting BB' nogmaals door het punt O gaat, zoodat tevens P zich in O bevindt;

de

de lemniscata zal derhalve ook door het punt O gaan, en O zal hare knoop wezen. Men moet daarom, bij het bepalen der vergelijking van de kromme lijn, den oorsprong der coördinaten niet op het midden van AA′ nemen, maar in het inwendige gelijkvormigheids-punt der beide cirkels. Met gelijke cirkels is dit eveneens het geval, maar uithoofde van die gelijkheid ligt het gelijkvormigheids-punt juist op het midden der middelpuntslijn. De vorm dezer vergelijking zal te eenemale verschillen van dien der vergelijkingen van de boven beschouwde lemniscaten, want de lemniscata heeft hier eene geheel andere gedaante; hare strikken zijn wel symmetrisch ten opzigte van de as YY′, maar geenszins ten opzigte van de as XX′; deze strikken zijn scheef; er zijn geene evenwijdige koorden, welker middenpunten op eene regte lijn gelegen zijn; de lemniscata heeft daarom geene eigenlijke ware as, of liever hare ware as is kromlijnig. Het een en ander kan uit de figuur worden opgemerkt, in welke de kromme lijn voor het geval van A′B′ = 2AB is geschetst; men ziet bovendien, dat de inwendige raaklijnen der beide cirkels raaklijnen zijn tot de punten P en P′ der lemniscata, en dat de kromme lijn, aan wederzijden van deze punten, zeer langzaam van de regtlijnige rigting dezer raaklijnen afwijkt, zoodat, als de arm AB, boven en onder de rigting CABD, bogen van geene groote uitgestrektheid beschrijft, het punt P ook zeer nabij in eene regte lijn zal heen en weêr gaan.

---

§ III.

Hetgeen ik mij voorstelde te ontvouwen over kromme lijnen, die een juisten, een eigenlijk gezegden lemniscatischen vorm hebben, is in de beide voorgaande §§ begrepen. Ik kan evenwel niet nalaten, ten slotte nog van

eenige andere kromme lijnen te gewagen, welke, óf door vorm eenige betrekking tot de lemniscaten schijnen te hebben, óf welker vergelijkingen met die der lemniscaten van de eerste orde min of meer verwant zijn, òf tot welke men, bij eene beschouwing der lemniscaten, als van zelve geleid wordt, en door welker onderzoek men tot enkele belangrijke uitkomsten geraakt.

---

a. De eigenlijke lemniscaten van de eerste orde zijn kromme lijnen, die steeds dezelfde punten van overeenkomst hebben. Zij bestaan uit twee gelijke en gelijkvormige strikken, symmetrisch ten opzigte van twee loodregte assen; zij hebben eene regtlijnige as, op welke twee toppen der kromme lijn aanwezig zijn, en in het midden een' knoop; van de toppen zijn de raaklijnen loodregt op de as gerigt; door den knoop gaan twee raaklijnen, makende met de as scherpe hoeken; zij hebben ook dezelfde algemeene wording, en hare vergelijkingen zijn begrepen in dezelfde algemeene vergelijking. Niettemin kan men vele eenvoudige en verschillende constructieën bedenken, door welke kromme lijnen verkregen worden, in vorm aan de lemniscaten nabijkomende, hoezeer zij geenszins tot het geslacht der lemniscaten behooren.

Men denke b. v. een' cirkel, neme eene middellijn als as aan, en trekke stralen, die den omtrek in zekere punten α zullen snijden; uit deze punten late men loodlijnen $\alpha\beta$ op de as neder, en brenge deze loodlijnen met cirkelbogen, uit de punten α als middelpunten beschreven, op de eerstgenoemde stralen over, dat is elke loodlijn op dien straal, uit welks einde zij is nedergelaten. Deze constructie, in alle vier quadranten herhaald, geeft op de gezamenlijke stralen eene reeks van punten, uitmakende de punten van een kromlijnig beloop, dat in zeker opzigt lemniscatisch kan genoemd worden.

Het bijzondere van dit beloop ligt daarin, dat het schier op eene tegengestelde wijze bestaat ten opzigte van het beloop der lemniscata van Ber-

Bernouilli. Indien men deze laatste, bij den knoop, in twee helften scheidt, en dezelve alsdan, zonder omkeering, van plaats verwisselt, zoodat de toppen nu bij het centrum, alwaar eerst de knoop was, in aanraking komen, en de beide hoeken of spitsen van den oorspronkelijken knoop nu toppen worden op dezelfde lijn, welke ook eerst de as was, dan zal men genoegzaam den vorm hebben voorgesteld van de kromme lijn, welker constructie zoo even is opgegeven. Zij is dus, als het ware eene lemniscata met spitse toppen; de raaklijnen, door deze toppen gaande, maken ook, even als de centrale raaklijnen der bernouilliaansche lemniscata, halve regte hoeken met de as, maar door den knoop zal nu slechts ééne raaklijn gaan. Overigens dient de vergelijking van den vorm der kromme lijn met dien, welke, op voorzegde wijze, door middel eener bernouilliaansche lemniscata, zou kunnen verkregen worden, alleenlijk tot opheldering of begrip der uitkomst van de constructie; want er moge overeenkomst bestaan ten opzigte der rigting van de genoemde raaklijnen, de ligging der punten is toch met betrekking tot de assen zeer verschillend.

De poolvergelijking der kromme lijn is

$$r = \pm a\,(1 - sin.\,\varphi)\;,$$

zijnde a de halve as en r de voerstraal. De vergelijking onder orthogonale coördinaten is van den vierden graad. De inhoud en de omtrek worden gevonden in bepaalde functiën van r of van φ, maar voor het tegenwoordig oogmerk geven zij geene aanleiding tot belangrijke opmerkingen.

Men kan dezelfde constructie herhalen in eene ellips, hebbende a en b tot halve assen. De poolvergelijking der voortgebragte kromme lijn zal wezen

$$r^2 = \frac{a^2 b^2\,(1 - sin.\,\varphi)^2}{a^2.\,sin.^2\,\varphi + b^2.\,cos.^2\,\varphi}\;;$$

onder regthoekige coördinaten is hare vergelijking van den achtsten graad met termen, die allen van evene afmeting zijn. Op dezelfde wijze kan men

met

met elke geslotene kromme lijn te werk gaan, de lemniscaten zelve niet uitgezonderd.

Men kan ook, in eene ellips, op elken centralen voerstraal, en wel van af het middelpunt, — en niet van den omtrek, — overbrengen de projectie van den voerstraal op de as a of op de as b. Werkte men op een' cirkel, dan zou men in elk quadrant een halven' cirkel verkrijgen, en door de volledige constructie zouden derhalve ontstaan twee rakende cirkels, begrepen in dezelfde vergelijking $r = \pm a \cos. \varphi$. Bij eene ellips ontstaat echter geene zamenvoeging van twee ellipsen, maar eene verbinding van twee ovalen, begrepen in de vergelijking:

$$r^2 = \frac{a^2 b^2 \cos.^2 \varphi}{a^2. \sin.^2 \varphi + b^2. \cos.^2 \varphi} = \frac{a^2 b^2}{b^2 + a^2. \tang.^2 \varphi},$$

en de strikvormige kromme, uit de vereeniging dezer twee ovalen bestaande, zal, even als de lemniscaten, die in § I zijn overwogen, tot de lijnen van den vierden graad behooren. De rectificatie-formule is afhankelijk van een irrationaal polynomium van den achtsten graad, zonder dat de vorm door symmetrie eenigzins belangrijk is. De vergelijking der kromme heeft eenige overeenkomst met de algemeene vergelijking (3) der lemniscaten van de eerste orde, zijnde het onderscheid alleenlijk gelegen in de afmeting van den noemer der gebrokene uitdrukking, welke het tweede lid der vergelijkingen is. Ook op nog zeer vele andere wijzen kan men, door het overbrengen van zekere lijnen op de centrale voerstralen eener ellips, of eener andere symmetrische en in zich zelve wederkeerende kromme lijn, tot vormen van kromme lijnen geraken, die met den lemniscatischen vorm eenige overeenkomst hebben; maar het onderzoek is van een te gering belang, om er langer bij te vertoeven.

---

b. De wiskundige SERRET kwam, bij de beschouwing van de rectificatie der gewone lemniscata en der cassinoïde, op het denkbeeld der behandeling van de meer algemeene vergelijkingen:

$$r^m = a^m \,.\, cos.\, m\,\varphi\,,$$

$$r^{2m} - 2a^m r^m \,.\, cos.\, m\,\varphi + a^{2m} = b^{2m}\,,$$

inhoudende de bijzondere vergelijkingen van lemniscaten en cassinoïden van hoogere orden. Bij de inleidende beschouwingen (§ I, hier voor) is ook opgemerkt de nog algemeenere vergelijking (6), welke tot onderscheidene andere lemniscaten van hoogere orden kan behooren. Lettende nu op den vorm dezer vergelijkingen, zoo wordt men gebragt tot het denkbeeld der beschouwing van zoodanige andere vormen, welke uit de voorgaande ontstaan, door eenvoudiglijk de coëfficiënten en exponenten der polaire coördinaten en der parameters met elkander te verwisselen. Daardoor ontstaan, zoo men b. v. slechts let op de twee bovenstaande vergelijkingen, deze twee vormen:

$$\left.\begin{aligned} r &= a\,.\,cos.^{m}\varphi \\ r &= \frac{b-a}{1-a\,.\,m\,.\,cos.^{m}\varphi} \end{aligned}\right\}\,,\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\quad (61)$$

kunnende, tot meerdere algemeenheid, het dubbele teeken voor de tweede leden gesteld worden, wanneer m een geheel, positief en even getal is. Is m geheel en positief, even of oneven, zoo behoort de eerste vorm tot de vergelijkingen eener soort van kromme lijnen, welke bestaan uit de zamenvoeging van twee cironden, met de minder bolle of meer spitse toppen naar elkander gekeerd en tegen elkander sluitende, zoodat het geheele beloop min of meer lemniscatisch is. De tweede vorm behoort tot vergelijkingen van kromme lijnen, die én eene ovale, én eene dubbel strikvormige gedaante kunnen hebben; — zoo is b. v. voor $m = 2$ de vorm der aequatie niet onderscheiden van dien der vergelijking (11), in § I behandeld. Om in geene te breede ontwikkelingen te treden worde hier de aandacht, voor eenige oogenblikken, slechts gevestigd op den eersten vorm

$$r = a \, . \, cos.^m \varphi \, ,$$

en dan ook met het eenige doel om de uitkomsten te doen kennen van de quadratuur en der rectificatie van sommige der kromme lijnen, welker vergelijkingen in dezen vorm begrepen zijn.

Voor de quadratuur heeft men

$$\partial \, . \, \mathrm{I} = \tfrac{1}{2} r^2 \, \partial\varphi = \tfrac{1}{2} a^2 \, . \, cos.^{2m} \varphi \, . \, \partial\varphi \, ,$$

en de bepaalde quadratuur, tusschen de grenzen $\frac{1}{2}\pi$ en 0, geeft dienstvolgens, dien inhoud door A_m beteekenende,

$$\mathrm{A}_m = \tfrac{1}{2} a^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} cos.^{2m}\varphi \, . \, \partial\varphi = a^2 \frac{\left\{\Gamma\left(\frac{2m+1}{2}\right)\right\}^2}{\Gamma\,(2m+1)} \, . \, 2^{2m-2} =$$

$$= 2^{2m-3} \, . \, a^2 \frac{\left\{\Gamma\left(\frac{2m+1}{2}\right)\right\}^2}{m\,\Gamma\,(2m)} \, ,$$

of wel

$$= 2^{2m-3} \, . \, \frac{a^2}{m} \, . \, \frac{\Gamma^2\left(\frac{2m+1}{2}\right)}{\Gamma\,(2m)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (62)$$

De quadratuur dezer kromme lijnen is derhalve merkwaardig, omdat zij belangrijke betrekkingen kan opleveren tusschen de waarde der functie Γ van verschillende wortels, of ook, omdat zij meetkundige voorstellingen van die functie geeft, even zoo als dit plaats heeft bij het onderzoek der rectificatie van de lemniscaten $r^m = a^m \, . \, cos. \, m\varphi$, door den Heer SERRET in het werk gesteld (*Journal de* LIOUVILLE, Tome VII, pag. 114).

Aangezien men heeft, uit bekende uitkomsten van integratie,

$$\Gamma\,(2m) = 1 \, . \, 2 \, . \, 3 \, . \, 4 \, \ldots . \, (2m-1) \, ,$$

$$\Gamma\left(\frac{2m+1}{2}\right) = \frac{1 \, . \, 3 \, . \, 5 \, . \, 7 \, \ldots . \, (2m-1)}{2^m} \sqrt{\pi} \, ,$$

zal, m geheel en positief zijnde, de verhouding tusschen de inhouden der qua-

quadranten van twee kromme lijnen, elkander opvolgende in de orde van m en $m+1$ (en dus in derzelver vergelijkingen exponenten hebbende, welke ééne éénheid verschillen), steeds standvastig wezen, en wel

$$= \frac{m+1}{m \,.\, 2m \,.\, (2m+1)} \,,$$

waaruit blijkt, hoezeer de inhouden verminderen bij het toenemen van m, dat is bij het smaller en smaller worden der eironde strikken.

Indien m gebroken is, verkrijgt men, door de inhouden der quadranten van de kromme lijnen, meetkundige voorstellingen van de eigenlijke functie Γ. Het geval van $m = \frac{1}{2}$ moet echter uitgezonderd worden; want de inhoud der kromme, hebbende

$$r = \pm\, a \sqrt{\cos.\varphi}$$

tot vergelijking, is volstrektelijk bepaald of meetbaar, zijnde

$$A_{\frac{1}{2}} = 2a^2 \,.\, 2^{-2} \,.\, \frac{\Gamma^2\left(\frac{2}{2}\right)}{\Gamma(1)} = \tfrac{1}{2}\, a^2 \,.$$

Verder zal men hebben

$$\left.\begin{array}{ll}
A_{\frac{1}{3}} = 3a^2 \,.\, 2^{-\frac{7}{3}} \,.\, \dfrac{\Gamma^2\left(\frac{5}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \;; & A_{\frac{1}{4}} = 4a^2 \,.\, 2^{-\frac{5}{2}} \,.\, \dfrac{\Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \;; \\
A_{\frac{1}{5}} = 5a^2 \,.\, 2^{-\frac{13}{5}} \,.\, \dfrac{\Gamma^2\left(\frac{7}{10}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{5}\right)} \;; & A_{\frac{1}{6}} = 6a^2 \,.\, 2^{-\frac{8}{3}} \,.\, \dfrac{\Gamma^2\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \;; \\
A_{\frac{1}{7}} = 7a^2 \,.\, 2^{-\frac{19}{7}} \,.\, \dfrac{\Gamma^2\left(\frac{9}{14}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{7}\right)} \;; & A_{\frac{1}{8}} = 8a^2 \,.\, 2^{-\frac{11}{4}} \,.\, \dfrac{\Gamma^2\left(\frac{5}{8}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} \;; \\
\text{enz.} & \text{enz.}
\end{array}\right\} \ldots (63)$$

Nu is $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, en $\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)$ vindt men uit $\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)$ door de bekende betrekking

$$\Gamma(p) \,.\, \Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin.\, p\pi} \;;$$

want

want $\Gamma(\frac{2}{3})$ heeft men onmiddellijk uit $A_{\frac{1}{6}}$, wijl door dezelfde betrekking $A_{\frac{1}{6}}$ herleid wordt tot

$$A_{\frac{1}{6}} = 6a^2 \cdot 2^{-\frac{8}{3}} \frac{\sin.\frac{2}{3}\pi}{\pi} \cdot \Gamma^3(\tfrac{2}{3}) .$$

$\Gamma(\frac{3}{4})$ heeft men uit $A_{\frac{1}{4}}$, en daarmede dan ook $\Gamma(\frac{1}{4})$.

Door $m = \frac{2}{5}$ en $= \frac{3}{5}$ te stellen, verkrijgt men twee vergelijkingen, in welke zullen voorkomen $\Gamma(\frac{9}{10})$, $\Gamma(\frac{4}{5})$ en $\Gamma(\frac{11}{10})$, $\Gamma(\frac{6}{5})$; deze hangen dus af van $\Gamma(\frac{1}{10})$ en $\Gamma(\frac{1}{5})$, welke beide derhalve uit de herleide vergelijkingen zullen kunnen opgelost worden.

Met $\Gamma(\frac{1}{5})$ heeft men $\Gamma(\frac{2}{5})$ uit $A_{\frac{1}{5}}$, vermits uit de bekende betrekking

$$2^{2p-1} \cdot \Gamma(p) \cdot \Gamma(p+\tfrac{1}{2}) = \pi^{\frac{1}{2}} \cdot \Gamma(2p)$$

gevonden wordt eene waarde van $\Gamma(\frac{7}{10}) = \Gamma(\frac{1}{5}+\frac{1}{2})$ in functie van $\Gamma(\frac{2}{5})$ en $\Gamma(\frac{1}{5})$.

$\Gamma(\frac{3}{5})$ wordt bekend uit $\Gamma(\frac{6}{10}) = \Gamma(\frac{1}{10}+\frac{1}{2})$.

$\Gamma(\frac{1}{6})$ heeft met uit $A_{\frac{1}{3}}$, door eerst $\Gamma(\frac{5}{6})$ op te lossen.

En zoo kan men voortgaan met het aannemen van verschillende positieve gebrokene waarden voor m, om, voor regelmatig opvolgende wortels, meetkundige voorstellingen van Γ aan te wijzen. Met goed gevolg maakt men daartoe ook gebruik van negatieve gebrokene waarden voor m, mits de algemeene formule voor den inhoud aldus schrijvende

$$A_m = a^2 \cdot 2^{2m-2} \cdot \frac{\Gamma^2\left(\frac{2m+1}{2}\right)}{\Gamma(2m+1)} .$$

Men kan ook, in de oorspronkelijke formule, $r = a\, cos.^m \varphi$, m geheel en negatief stellen. De kromme lijnen worden alsdan de omgekeerde van die, in welker vergelijkingen m als positieve exponent voorkomt, en zijn derhalve opene kromme lijnen. Voor $m = +1$ wordt de kromme een cirkel, hebbende a tot middellijn; $m = -1$ zijnde, zoo behoort de polaire aequatie tot eene regte lijn,

lijn, rakende genoemden cirkel middellijnig tegenover de pool. In het polaire stelsel is dus de omgekeerde van een' cirkel de regte lijn, mits de oorsprong in den omtrek genomen zij, terwijl de omgekeerde een cirkel zou wezen, indien de oorsprong in het centrum gelegen ware.

Voor $m = 2$ is de kromme gevormd uit twee tegen elkander sluitende eironden, waarvan de constructie gemakkelijk is, en eenigermate zamenhangt met die der lemniscata, in § I sub C beschouwd. Is $m = -2$, zoo heeft men de hyperbolische kromme met parabolische asymptoten, van welke mede in § I sub C (in de eerste noot, welke in dat artikel voorkomt) gewaagd is.

Zoo kan men ook m van den gebroken vorm $\pm \frac{p}{q}$ nemen, maar dit geval wordt onmiddellijk tot een der voorgaande gebragt; de uitkomsten zijn mede niet onbelangrijk.

Geeft de quadratuur der kromme lijnen, welker vergelijkingen begrepen zijn in de aequatie $r = a . cos.^m \varphi$, belangrijke resultaten, zoo verdienen dezelfde kromme lijnen ook opmerking ten aanzien der rectificatie, omdat, zoo als de quadratuur in vele gevallen eene meetkundige voorstelling oplevert der functieën Γ, eveneens door de rectificatie meerendeels voorstellingen van gewone en van ultra-elliptische functiën worden verkregen. De rectificatie-formule wordt namelijk:

$$\partial s = a . \partial \varphi . cos.^{m-1} \varphi \sqrt{(1 + (m^2 - 1) sin.^2 \varphi)} .$$

Deze formule is integreerbaar, bijaldien m is een geheel positief of negatief *even* getal. Is m geheel, positief of negatief, maar *oneven*, zoo hangt de rectificatie af van elliptische functieën der eerste en tweede soort, gelijk ligtelijk wordt ingezien.

Is m een positief of negatief gebroken, b. v. een positief gebroken van den vorm $\frac{1}{n}$, dat is, heeft men

$$r^n = a . cos. \varphi ,$$

 zoo